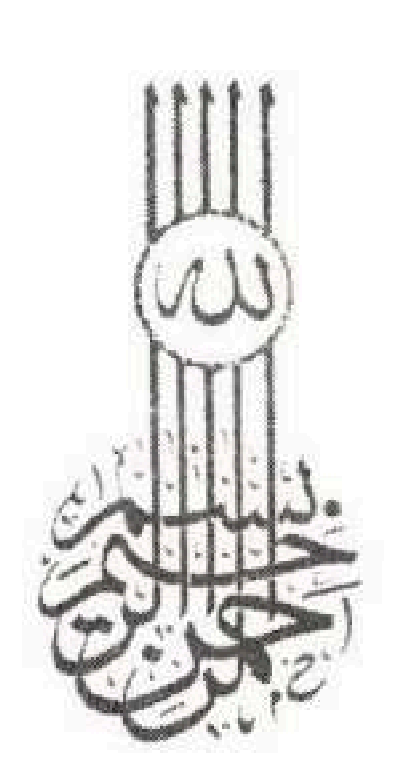
● الدكتور خضر حامد الأحمد

المدخل الى التحليل الرياضي

١٣٩٩ هـ
الريـــاض
١٩٧٩ م

الناشر: عمادة شؤون المكتبات - جامعة الرياض





المدخل الى التحليل الرياضى

الدكتور خضر حامد الأحمد
استاذ الرياضيات — كلية العلوم
جامعة الرياض

الناشر : عمادة شؤون المكتبات ـ جامعة الرياض ـ الريـاض ؛
ص.ب : ٢٤٥٤ الرياض — المملكه العربية السعودية

الرياض
١٣٩٩ هـ
١٩٧٩ م


mohamed khatab

المحتويات





بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

إن الهدف الرئيسي لهذا الكتاب يكمن في تقديم المواضيع الأساسية للتحليل الرياضي بأسلوب معاصر ، وتمهيد السبيل لملء الفجوة الفاصلة ما بين أوليات التحليل الحقيقي ، التي يعرض لها الطالب من خلال دراسته لمبادىء علم التفاضل والتكامل ، وبين البحوث المتقدمة في التحليل الرياضيّ . وقد جَهِدَ المؤلف في إخراج الكتاب ، بحيث يتمكن القارىء من استجلاء القدرة غير المحدودة التي يمتلكها أسلوب المسلمات Axiomatic Method في تطوير علم الرياضيات ، وبحيث يتعود الطالب على انتهاج هذا الأسلوب الذي يعتبر بحق من أهم ما جاد به الفكر الرياضي على مر العصور ، الأمر الذي يؤدي في نهاية المطاف إلى نبذ القارىء للعديد من المعتقدات الحدْسيَّة ، التي ربما يكون قد آمن بها في سياق دراسته لرياضيات المرحلة المدرسية ، بل لرياضيات السنة الجامعية الأولى .

يتألف الكتاب من ثمانية فصول . أما الفصل الأول ، فيتناول مبادىء نظرية المجموعات والعلاقات والدوال . ويجدر الاعتراف بأن معالجة نظرية المجموعات لم تستند إلى أسلوب المسلمات ، ذلك أن اعتماد هذا الأسلوب في نظرية المجموعات في هذه المرحلة بالذات ، من شأنه تشويش القارىء بدلاً من الأخذ بيده لاستيعاب بعض قوانينها ، التي لا يمكن بدونها فهم الفصول التالية التي صيغت بلغة المجموعات . لذا ، يمكن القول إن الفصل الأول هو بمثابة معجم للمصطلحات الواردة في الفصول اللاحقة .

وأما الفصل الثاني ، فيبحث — بشيء من الإسهاب — في نظرية الأعداد الحقيقية ، باعتبارها حقلاً مرتباً تاماً . ففضلاً عما لهذه النظرية من عميق الأثر في استيعاب الفضاءات المترية ، فإنني أعتقد بأن كثيراً من العقبات التي تحول بين الطالب وبين تمكنه من العديد من مواضيع التحليل ، منشأها عدم الإحاطة بخواص العدد الحقيقي ، بل وعدم الوقوف الصحيح على معنى العدد الحقيقي .

وأما الفصل الثالث،الذي يعتبر من أهم فصول الكتاب ، فيبحث في نظرية الفضاءات المترية . ويعود السبب في إدراج هذا الفصل في موقع متقدم من الكتاب ، الى أن دراسة التحليل الحقيقي من خلال الفضاءات المترية تتطلب جهداً ووقتاً يعادل تقريباً ما يحتاجه الطالب لدى دراسته للتحليل في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$ ، فضلاً عن أن إدراكه للمفاهيم الأساسية في التحليل الحقيقي يغدو أشمل وأعمق . كذلك ، فإن التعرف على الفضاءات المترية يؤهل القارىء لاستيعاب موضوع التوبولوجيا العامة بصورة أفضل وأسرع ، ذلك أن الفضاء المترى هو فضاء توبولوجي خاص .

وقد أفردنا الفصل الرابع لدراسة نهايات الدوال من فضاء متري إلى آخر ، ثم انتقلنا إلى نهايات الدوال والمتواليات الحقيقية بشيء من الإسهاب . ولما كانت النهايتان العليا والدنيا lim sup , lim inf لدالة حقيقية تشكلان أداتين على درجة عالية من الفعالية لكل من يود التعمق في التحليل الحقيقي ، فقد أوردنا في هذا الفصل تعريفها وبعضاً من أهم خواصها .

وفي حين تناولنا في الفصل الخامس استمرار الدوال من فضاء متري الى آخر ، فإننا قصرنا الفصل السادس على دراسة استمرار الدوال الحقيقية ، واستخلصنا فيه النظريات الأساسية في الاستمرار التي يعالجها عادة التحليل الحقيقي التقليدي . وفي مقدمتها نظرية القيمة المتوسطة Intermediate Value،ونظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر Maximum and Minimum Value،ونظرية التقارب المنتظم Uniform Convergence،ونظرية الاستمرار المنتظم Uniform Continuity .

ولما كان الإدراك السليم للمفاهيم الأساسية لعلم التفاضل والتكامل شرطاً ضرورياً لكل من أراد السير قدماً في موكب التحليل الرياضي ، فقد أوردنا فصلاً في المفاضلة وآخر في المكاملة .

فأما الفصل السابع الذي كرسناه للمفاضلة ، فيمكننا القول بأن الهدف منه يكاد يكون اشتقاق النظريات الأساسية . التي سبق وتعرف القارىء عليها في سياق دراسته الأولى لمبادىء علم التفاضل ، بيد أن البراهين هنا تمتاز بدقتها النظرية استناداً إلى النتائج التي استنبطناها في الفصول السابقة .

وأما الفصل الثامن والأخير ، فيبحث في المكاملة . وأود الإشارة في هذا الصدد الى رأي للعالم الكبير **ديودونيه** Dieudonné، في كتابه الرائع Foundations of Modern Analysis،يتلخص في أنه « لولا الأسم المرموق الذي يُنسَب إليه تكامل ريمان (أي اسم العلامة ريمان Riemann) ، لعفا الزمن على هذا التكامل منذ عهد بعيد » . ولا شك في أن **ديودنيه** على حق فيما يقول بعد الثورة العارمة ، التي خلفتها نظرية القياس والمكاملة والتي يعتبر **لوبيغ** Lebesgue ، قائد مسيرتها . ورغم هذا،فانني أعتقد بأنه من الصعوبة بمكان على الطالب استيعاب نظريات المكاملة الحديثة ، دون الارتقاء اليها بدءاً من تكامل ريمان . فضلاً عن أن السير على هذا المنوال،الذي يعكس التسلسل التاريخي في اكتشاف نظريات المكاملة المختلفة ، يطلع الطالب على الرابطة بينها . ولهذا السبب ، اقتصرنا هنا على إدراج تكامل ريمان من خلال تعريفنا لمجموعي داربو Darboux الأعلى والأدنى . وكان من الممكن في هذا المقام ، تعريف تكامل ريمان بطرق أخرى تمتاز عن طريقة داربو بسهولة تعميمها عند الانتقال الى تكامل ريمان — ستيلتجس Stieltjes ، بيد أننا آثرنا تعريف داربو لاعتقادنا بأنه الأسهل .

وتجدر الإشارة إلى خلو الكتاب من بعض المواضيع الأساسية ، تأتي في مقدمتها السلاسل اللامنتهية ، والتكاملات المضاعفة ، وتحليل الدوال الحقيقية على $\mathbb{R}^n$. ورغم أن إدراج هذه المواضيع في الكتاب تغنيه دون ريب ، إلا أن حجمه يتجاوز عندئذ الحدود التي رسمناها له .

هذا وأود أن أشير إلى واحدةٍ من السمات المميزة لكتابي هذا ، ألا وهي خلوّه من أي شكل هندسي ، الأمر الذي يترتب علي التمسك الصارم بأسلوب المسلمات الذي أضفى على الكتاب مسحة تحليلية صرفة . بحيث لم يعد القارىء بحاجة إلى ما يسميه ديودونيه « الحدس الهندسي » **Geometric Intuition** . وإنني أدرك تماماً أن هذا الأمر سيعرضني للنقد من قبل بعض السادة الزملاء ، لاسيما وأن الكتاب ابتدائي في مضمونه . وأنا أعترف بعجزي عن تقدير مدى الربح والخسارة بالنسبة للطالب من جراء هذا المسلك ، إلا أنه أسلوب أرتضيته لكتابي ، والله من وراء القصد .

ورغبة منا في مساعدة القارىء عند الرجوع إلى المصادر المكتوبة باللغة الإنجليزية ، فقد أوردت في آخر الكتاب ثبتاً بالمصطلحات الواردة فيه مرتبة وفق حروف الهجاء العربية ، مع مقابل كل منها باللغة الإنجليزية ، كما أوردت أيضاً مسرداً لأهم الرموز المستخدمة مع ما يعنيه كل منها باللغة العربية . وقد بسطت في الصفحة **٢٨٩** قائمة بأهم المراجع المستعان بها لدى وضع الكتاب .

وفي الختام ، فإنه يطيب لي أن أتوجه إلى الأخوة الزملاء في قسم الرياضيات بجامعة الرياض . وبخاصة رئيس القسم الأستاذ الدكتور سيد قاسم حسين، بجزيل الشكر على ما لقيته منهم من تشجيع ونصائح أفدت منها الى أبعد الحدود . الأمر الذي كان له الأثر الكبير في خروج هذا الكتاب إلى حيز النور .

المؤلف

خضر حامد الأحمد

الرياض في ١٣٩٨/٥/٢ هـ

١٩٧٨/٤/٩ م





الفصل الاول

المجموعات والعلاقات والدوال

Sets, Relations and Functions

١.١ المجموعات
Sets

قد تكون المجموعة أهم المفاهيم التي جادت بها رياضيات القرن العشرين . ونظرية المجموعات . التي يعتبر الرياضي الألماني جورج كانتور George Cantor (١٨٤٥ — ١٩١٨ م) مؤسسها الفعلي . أسهمت الى حد بعيد في إيجاد أساس موحد وواضح لفروع العلوم الرياضية . وغدت اللغة المعاصرة لجل هذه الفروع . ويكفينا القول بأن البنى الرياضية جميعاً تصاغ اليوم باستخدام لغة المجموعات . ورغم هذا . فلن نطمح في هذا الفصل في أكثر من مس بعض جوانب نظرية المجموعات . في حدود استعمالنا لها .

تدرك المجموعة بصورة حدسية . وكل محاولة لتعريفها هي من قبيل تفسير الماء بعد الجهد بالماء . وكأمثلة على المجموعات . نورد مجموعة طلاب جامعة الرياض . ومجموعة الأجرام السماوية . ومجموعة المستقيمات في المستوى،الخ ...

١,١١ — تعاريف

نقول عن كلٍّ من أعضاء مجموعة إنه عنصر ينتمي إليها . وتكون المجموعة **محدّدة تماماً** . إذا كان بمقدورنا الحكم ما إذا كان عنصرٌ ينتمي أو لا ينتمي إليها . فمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ...,1,2,3 محددة تماماً . في حين أن مجموعة الشعراء المبدعين في سوريا ليست كذلك . وإذا كانت A مجموعة . وكان a عنصراً من A . فإننا نرمز إلى انتماء a إلى A بالشكل $a \in A$. أما إذا كان a غير منتمٍ إلى A . فإننا نكتب $a \notin A$. وبالإضافة إلى الرمز لمجموعة بحرف كبير . فإننا غالباً ما نرمز لها بإيراد عناصرها . جميعها أو بعضها . بين قوسين . وعلى هذا فإن $\{1,2,3\}$. هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تصغر العدد 4 . كما أن $\{1,2,3,...\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة كلها .

تدعى المجموعة التي لا تحوي أي عنصر **المجموعة الخالية** . ويرمز لها بـ $\varnothing$. فمجموعة الأعداد الصحيحة التي مربع كل منها يساوي 3 خالية . ومجموعة طلاب كلية العلوم الذين تتجاوز أعمارهم المائة عام خالية كذلك .

نقول عن مجموعتين A,B إنهما **متساويتان** . ونكتب $A=B$. إذا انتمى كل عنصر من A الى B ، وانتمى كل عنصر من B إلى A . نستنتج من تعريف التساوي هذا أن تغيير ترتيب عناصر مجموعة،أو تكرار عنصر أو أكثر في المجموعة،لا يغير المجموعة . فمثلاً $\{a,b,a\}=\{a,b\}$ و $\{a,b\}=\{b,a\}$. وإذا لم يتحقق شرط التساوي بين مجموعتين A,B ، قلنا إنهما مختلفتان . ونكتب عندئذ $A\neq B$. فمثلاً $\{\{a\},b\}\neq\{a,b\}$.

هنالك أسلوب آخر شائع الاستعمال للدلالة على المجموعة . يطلق عليه اسم أسلوب **إدراج الخاصة المحدِّدة** . نوجزه فيما يلي : لتكن X مجموعة و x متغيراً في X . ولتكن $P(x)$ جملة تحوي المتغير x ، وتتصف بخاصة كونها صحيحة أو غير صحيحة عند تعويض x بعنصر من X . عندئذ تسمى $P(x)$ **خاصة محدِّدة** في X . وعلى سبيل المثال . إذا كان $X=\{1,2,3,4\}$. فيمكن أن تكون $P(x)$ هي المساواة $x^2=4$. ذلك أن هذه المساواة صحيحة عندما $x=2$. وغير صحيحة من أجل عناصر X المتبقية . كذلك . فيمكن أن تكون $P(x)$ المتراجحتين $2<x<10$. ذلك أن هاتين المتراجحتين صحيحتان عندما تأخذ x إحدى القيمتين $3,4$. و غير صحيحتين عندما تساوي x إحدى القيمتين $1,2$. وهكذا نرى أن $P(x)$ تقسم X إلى مجموعتين جزئيتين : **مجموعة** العناصر التي تحقق $P(x)$. ومجموعة العناصر التي لا تحققها . ويشار للمجموعة الأولى بالرمز $\{x\in X:P(x)\}$. الذي يُقرأ على النحو التالي : «مجموعة العناصر x من X التي تحقق الخاصة $P(x)$ » . ومن الممكن الرمز إلى هذه المجموعة بالشكل $\{x:P(x)\}$ إذا كانت المجموعة X معروفة . ولم يكن ثمة مجال للالتباس .

لتكن A,B مجموعتين . فإذا كان كل عنصر من A عنصراً في B أيضاً،قلنا إن A **مجموعة جزئية** من B (أو إن A محتواة في B . أو إن B تحوي A) . ونكتب $A\subseteq B$. وإذا لم يتحقق ذلك . فإننا نكتب $A\nsubseteq B$. فمثلاً . إن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية محتواة في مجموعة الأعداد الصحيحة كلها . كما أن $\{a\}\subseteq\{a,b\}$، في حين $\{1,2\}\nsubseteq\{1,3,4\}$. يترتب على هذا . وعلى تعريف التساوي بين مجموعتين . أن المساواة $A=B$ تكافىء $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$. نستنتج كذلك أنه أياً كانت المجموعة A فإن $A\subseteq A$. وفي الحالة التي يكون فيها $A\subseteq B$ و $A\neq B$ ، فإننا نقول إن A **مجموعة جزئية تماماً** من B (أو إن A محتواة تماماً في B . أو إن B تحوي تماماً A) . ونرمز لذلك بـ $A\subset B$. فمثلاً $\{1\}\subset\{1,2\}$. في حين أن $\{1,2\}\not\subset\{1,2\}$. هذا وإن المجموعة الخالية $\emptyset$ مجموعة جزئية من أي مجموعة A . ذلك أنه لو لم تصح هذه الدعوى . لوجد عنصر x ينتمي إلى $\emptyset$ دون A . أي لكانت $\emptyset$ مجموعة غير خالية (لأن $x\in\emptyset$) .

تسمى المجموعة التي عناصرها هي كل المجموعات الجزئية من مجموعة A . **مجموعة أجزاء** A (أو **مجموعة قوة** A) . ويرمز لها عادة بـ $\mathcal{P}(A)$ (أو بـ 2^A) . فإذا كانت $A=\{1,2\}$ مثلاً . فإن

$$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}.$$

عندما نكون بصدد دراسة مجموعات جزئية من مجموعة غير خالية X . فإننا نسمي X **مجموعة كلية** . وعلى هذا ، فإن مجموعة كل المثلثات في المستوى تمثل المجموعة الكلية عند دراستنا لتشابه المثلثات . هذا . ولا وجود لمجموعة تحوي كل المجموعات ، ذلك أن قبولنا بوجود هذه المجموعة ، يوقعنا في تناقض (يسمى تناقض كانتور) . لن ندخل في تفاصيله الآن .

درسنا في علم الحساب العمليات العددية الأساسية ، وأبرزها عمليتا الجمع والضرب . في كل من هاتين العمليتين . يقابل كلَّ زوج من الأعداد عددٌ آخر : حاصل جمعهما (أو مجموعها) في حالة الجمع ، وحاصل ضربهما (أو جداؤهما) في حالة الضرب .

هنالك عمليات شبيهة من نواح عدة بالعمليات الحسابية . وهذه العمليات معرفة على مجموعات عناصرها مجموعات جزئية من مجموعات كلية . ليست عددية بالضرورة . فإذا أفترضنا A , B مجموعتين جزئيتين من مجموعة كلية X . فإننا نعرف هذه العمليات فيما يلي .

١,١٢ — تعريف (اجتماع مجموعتين)

يطلق اسم **اجتماع** مجموعتين A,B على مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين A,B على الأقل . (أو ربما إلى كليهما) . فإذا رمزنا لهذا الاجتماع بـ $A \cup B$. فإن $A \cup B = \{x : x \in A$ أو $x \in B\}$.
وعلى سبيل المثال . فإن

$$\{a,b,c\} \cup \{d,e,c,b,f\} = \{a,b,c,d,e,f\} \quad \text{و} \quad A \cup A = A \quad \text{و} \quad A \cup \varnothing = A$$

١,١٣ — نتائج

أياً كانت المجموعتان A,B . فإن $B \subseteq A \cup B$ و $A \subseteq A \cup B$ و $A \cup B = B \cup A$

١,١٤ — تعريف (تقاطع مجموعتين)

يطلق اسم **تقاطع** مجموعتين A,B على مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى A,B في آن واحد . أي على مجموعة العناصر المشتركة بين A,B . فإذا رمزنا لهذا التقاطع بـ $A \cap B$. فإن $A \cap B = \{x : x \in A$ و $x \in B\}$
وعلى سبيل المثال . فإن

$$\{a,b,c\} \cap \{d,e,c,b,f\} = \{b,c\} \quad \text{و} \quad \{a,b,c\} \cap \{d,e,f\} = \varnothing$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing \quad \text{و} \quad A \cap A = A$$

١,١٥ — نتائج

أياً كانت المجموعتان A,B . فإن $A \cap B \subseteq B$ و $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B = B \cap A$

وتسمى المجموعتان اللتان لا عناصر مشتركة بينهما . مجموعتين **منفصلتين** . وواضح أن تقاطع المجموعتين المنفصلتين . هو المجموعة الخالية .

١,١٦ — تعريف (حاصل طرح مجموعة من أخرى)

يطلق اسم **حاصل طرح** المجموعة B من المجموعة A على مجموعة كل العناصر التي تنتمي الى A دون B .
فإذا رمزنا لحاصل الطرح هذا بـ $A - B$. فإن $A - B = \{x : x \in A$ و $x \notin B\}$

وعلى سبيل المثال ، فإن $A - \emptyset = A$ و $A - A = \emptyset$ و $\{a,b,c\} - \{d,e,c,b,f\} = \{a\}$

١,١٧ — نتائج

أياً كانت المجموعتان A,B ، فإن $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$ و $A - B \subseteq A$

١,١٨ — تعريف (متممة مجموعة)

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة الكلية X . يطلق اسم **متممة** المجموعة A بالنسبة لـ X على المجموعة $X - A$ ، أي على المجموعة $\{x : x \in X, x \notin A\}$

وعلى سبيل المثال ، فاذا كانت X هي مجموعة السيارات الكبيرة في المجموعة الشمسية ، وكانت A مجموعة سيارتي عطارد والزهرة ، فإن

$X - A =$ {الأرض ، المريخ ، المشتري ، زحل ، نبتون ، بلوتون}

١,١٩ — نتائج

أياً كانت المجموعتان الجزئيتان A,B من المجموعة الكلية X ، فإن

$A - B = A \cap (X - B)$ و $X - (X - A) = A$

و $A \cap (X - A) = \emptyset$ و $A \cup (X - A) = X$

ونترك للقارىء ، التحقق من صحة النظرية التالية .

١,١٩١ — نظرية

أياً كانت المجموعات A,B,C ، فإن

(دستورا التجميع) $\left\{ \begin{array}{l} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{array} \right.$

(دستورا التوزيع) $\left\{ \begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \right.$

١,١٩٢ — دستورا دي مورغان De Morgan

إن متممة اجتماع مجموعتين بالنسبة لـ X تساوي تقاطع متممتيهما، ومتممة تقاطعهما تساوي اجتماع متممتيهما ، أي أن

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$
$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

البرهان

سنكتفي بإثبات المساواة الأخيرة ، ملقين مهمة إثبات المساواة الأولى على عاتق القارىء .

(١) لنفترض أولاً x عنصراً من $X-(A\cap B)$. إذن نجد استناداً إلى (١،١٦) أن $x\in X$ و $x\notin A\cap B$ ، وهذا يعني أن $x\in X$ و $x\notin A$ أو $x\notin B$. فإذا كان $x\in X$ ، و $x\notin A$ ، فإن $x\in X-A$. وإذا كان $x\in X$ و $x\notin B$ ، فإن $x\in X-B$. وبالتالي ، نجد أن $x\in X-A$ ، أو $x\in X-B$. وبعبارة أخرى نجد أن $x\in(X-A)\cup(X-B)$ وهكذا ، نكون قد وجدنا أنه إذا كان x عنصراً من $X-(A\cap B)$ ، فإن x عنصر من $(X-A)\cup(X-B)$ ، وذلك يعني أن

$$X-(A\cap B)\subseteq(X-A)\cup(X-B)$$

(٢) لنفترض الآن x عنصراً من $(X-A)\cup(X-B)$. عنـــدئـــذ $x\in X-A$ ، أو $x\in X-B$. فإذا كان $x\in X-A$ ، فإن $x\in X$ و $x\notin A$. ولما كان هذا يقتضي أن $x\in X$ و $x\notin A\cap B$ ، فإننا نستنتج أن $x\in X-(A\cap B)$. ونجد بصورة مماثلة أن $x\in X-B$ تقتضي كذلك أن $x\in X-(A\cap B)$. يترتب على هذا أنه إذا كان x عنصراً من $(X-A)\cup(X-B)$ ، فإن x عنصر من $X-(A\cap B)$. إذن

$$(X-A)\cup(X-B)\subseteq X-(A\cap B)$$

إن علاقة الاحتواء هذه ، بالإضافة إلى علاقة الاحتواء التي استنتجناها من (١)،تعنيان صحة المساواة التي نحن في صدد إثباتها .■

لتعريف حاصل ضرب مجموعتين ، لا بد لنا مسبقاً من تعريف الأزواج (الثنائيات) المرتبة .

١،١٩٣ — تعريف (الزوج المرتب)

نقول عن شيء مركب من عنصرين a و b ، مأخوذين بالترتيب a ثم b، إنه **زوج مرتب** ، ونرمز غالباً لهذا الزوج بـ (a,b). نسمي a المسقط الأول لهذا الزوج ، ونكتب $a=pr_1(a,b)$ ، كما نسمي b المسقط الثاني لهذا الزوج ، ونكتب $b=pr_2(a,b)$.

وعلى سبيل المثال ، فإن الزوج (حذاء ،جورب) ، يفترض أن يكون مرتباً عند القيام بعملية الانتعال ، فلا يمكن إنتعال الحذاء أولاً ثم لباس الجورب . أما محاولة معرفة ما إذا كان الزوج (بيضة ،دجاجة) مرتباً بالنسبة للوجود ، فأمر زج الكثيرين في مناقشات بيزنطية ، كانت دوماً تدور في حلقة مفرغة .

يعرف تساوي زوجين مرتبين بالقاعدة التالية :

$$(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow a=c \text{ و } b=d$$

لاحظ أن $\{a,b\}$ و (a,b) شيئان مختلفان . فإذا كان $a=b$ ، فإن $\{a,b\}=\{a\}$ ، في حين أن $(a,b)=(a,a)$ ، أي أن المجموعة $\{a,b\}$ في هذه الحالة تتألف من عنصر واحد ، في حين يتألف الزوج المرتب من عنصرين (رغم أنهما متساويان) . أما إذا كان $a\neq b$ ، فمن الواضح أن $\{a,b\}=\{b,a\}$ ، في حين يكون $(a,b)\neq(b,a)$. وبالتالي ، فلا يمكن أن يكون (a,b) و $\{a,b\}$ شيئاً رياضياً واحداً .

١,١٩٤ — ملاحظة

يعرف الزوج المرتب (a,b) أحياناً على أنه المجموعة $\{\{a\},\{a,b\}\}$ ، وعندئذ نستنتج مباشرة أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $(a,b)=(c,d)$ ، هو $b=d$ و $a=c$.

١,١٩٥ — تعريف (جداء مجموعتين)

إن **جداء مجموعتين** A,B الذي نرمز له بـ $A\times B$ ، هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التي تنتمي مساقطها الأولى الى A ، وتنتمي مساقطها الثانية الى B ، أي أن

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,\, b\in B\}$$

يسمى $A\times B$ **جداء ديكارتيا** (أو **مجموعة ديكارتية**) لـ A و B، وذلك نسبة الى الرياضي والفيلسوف الفرنسي الفذ **ديكارت** Descartes ، الذي كان أول من نشر أبحاثاً في الهندسة التحليلية عام ١٦٣٧م .

وهكذا ، إذا كان $A=\{1,3,5\}, B=\{2,4\}$ ، فإن :

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$$

وينتج عن تعريف جداء مجموعتين ، أن حاصل ضرب المجموعة A بنفسها،أي $A\times A$ ، والذي نرمز له أحياناً بـ A^2 ، هو المجموعة : $A\times A=\{(a,b):a,b\in A\}$

وهكذا فبفرض $A=\{1,3,5\}$ ، يكون:

$$A\times A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

لتعريف جداء ثلاث مجموعات لا بد لنا مسبقاً من تعريف الثلاثيات المرتبة .

١,١٩٦ — تعريف (الثلاثي المرتب)

لتكن a,b,c ثلاثة أشياء . يعرف **الثلاثي المرتب** (a,b,c) على أنه زوج مرتب،مسقطه الأول هو الزوج المرتب (a,b) ، ومسقطه الثاني هو c ، أي أن : $(a,b,c)=((a,b),c)$

نستنتج من هذا التعريف ، ومن تعريف الزوج المرتب أن :

$$(a,b,c)=(d,e,f)\Leftrightarrow((a,b),c)=((d,e),f)$$
$$\Leftrightarrow(a,b)=(d,e) \text{ و } c=f$$
$$\Leftrightarrow a=d \text{ و } b=e \text{ و } c=f$$

١,١٩٧ — تعريف (جداء ثلاث مجموعات)

لتكن A,B,C ثلاث مجموعات . نعرف $A\times B\times C$ على أنه جداء المجموعتين $A\times B,C$ ، أي أن :

$$A\times B\times C=(A\times B)\times C$$

وبالتالي فإن :

$$A\times B\times C=\{((a,b),c):(a,b)\in A\times B\ ,\ c\in C\}$$
$$=\{(a,b,c):a\in A\ ,\ b\in B\ ,\ c\in C\}$$

يترتب على هذا أن حاصل الضرب $A\times A\times A$ ، الذي يرمز له أحياناً بـ A^3 ، هو المجموعة :

$$A\times A\times A=\{(a,b,c):a,b,c\in A\}$$

وهكذا ، فبافتراض $B=\{2,4\}$ ، نجد

$$B\times B\times B=\{(2,2,2),(2,2,4),(2,4,2),(2,4,4),(4,4,4),(4,4,2),(4,2,4),(4,2,2)\}$$

وفي مقام الحديث عن ضرب المجموعات ، من المناسب إيراد النظرية التالية :

١,١٩٨ — نظرية

(١) إذا كانت إحدى المجموعتين A,B خالية ، فإن $A\times B$ مجموعة خالية .

(٢) أياًكانت المجموعات A,B,C ، فإن $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

(٣) إذا كانت $A\subseteq B\ ,\ C\subseteq D$ ، فإن $A\times C\subseteq B\times D$

البرهان

(١) لنفترض مثلاً أن $A=\varnothing$ ، وأن $A\times B\neq\varnothing$. إذن هنالك عنصر على الأقل ، وليكن (a,b) ، منتمٍ إلى $A\times B$. لكن هذا يعني أن $a\in A$ ، أي أن $A\neq\varnothing$ ، وهذا مناقض للفرض . لذا ، لا بد أن يكون $A\times B=\varnothing$.

(٢) إن المساواة $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ صحيحة ، إذا كانت إحدى المجموعات A,B,C على الأقل خالية،وذلك أستناداً إلى (١) . لنفترض الآن أن A,B,C غير خالية،لكن $B\cap C=\varnothing$. عندئذ يكون $A\times(B\cap C)=\varnothing$. سنثبت في هذه الحالة أيضاً أن $(A\times B)\cap(A\times C)$ خالية كذلك . إذا أفترضنا جدلاً أن المجموعة الأخيرة غير خالية ، لوجد عنصر (x,y) في $A\times B$ وفي $A\times C$ معاً ، ولترتب على ذلك أن y عنصر من B,C معاً ، أي عنصر من $B\cap C$ ، وهذا غير ممكن لأن $B\cap C=\varnothing$. وهكذا نكون قد وجدنا أن المساواة الواردة في (٢) صحيحة دوماً إذا كانت إحدى المجموعات $A,B,C,B\cap C$ على الأقل خالية . سنثبت صحتها بفرض أن كلاً من هذه المجموعات غير خالية .

ليكن $(x,y) \in A \times (B \cap C)$ ؛ إذن $y \in B \cap C$ و $x \in A$. ويترتب على هـذا أن $x \in A, y \in B, y \in C$ ، وبالتالي فإن (x,y) تنتمي إلى $A \times B$ و $A \times C$ معاً، أي أن $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ ، وهكذا فإن $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.

وبالعكس ، لنفترض $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. إذن (x,y) عنصر من $A \times C$ و $A \times B$ معاً . ويترتب على هذا أن $x \in A, y \in B, y \in C$ ، أي $x \in A, y \in B \cap C$ ، وهذا يعني أن $(x,y) \in A \times (B \cap C)$. وهكذا ، فإن $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$.
إن علاقة الاحتواء هذه مع سابقتها تثبتان صحة المساواة المطلوبة .

(٣) إذا افترضنا أن $A \times C = \emptyset$ فإن $A \times C \subseteq B \times D$. لنثبت صحة علاقة الاحتواء هذه في الحالة $A \times C \neq \emptyset$. ليكن $(x,y) \in A \times C$. إذن $x \in A, y \in C$. ولما كان $A \subseteq B, C \subseteq D$ ، فإن $x \in B, y \in D$ ، أي أن $(x,y) \in B \times D$ ، وهذا يعني أن $A \times C \subseteq B \times D$. ■

لتكن X مجموعة كلية ، ولنفترض أننا نود الحديث عن جماعة من المجموعات الجزئية من X . للتمييز بين مجموعات هذه الجماعة ، فمن الملائم إعطاء أسماء لها . ولهذا الغرض ، سنورد مجموعة I من الأسماء . سنرمز لعناصر I بـ $i,j,k,\ldots$ ، وسندعوها أسماء مجموعاتنا الجزئية من X . وعلى سبيل المثال ، فمن الممكن أن تكون $A_i, A_j, A_k, \ldots$ مجموعات جزئية من X .

من الواضح أن إعطاءنا أسماء من عناصر I للمجموعات الجزئية من X ، ليس سوى إسناد دليل لكلٍّ من هذه المجموعات الجزئية : فدليل A_i هو i ودليل A_j هو j ... الخ . وهذا هو السبب الذي يخولنا تسمية I **بمجموعة الأدلة** ، كما تسمى عناصر I **بالأدلة** . ونقول عن جماعة المجموعات الجزئية من X ، التي أسندنا لكل منها اسماً من I بأنها **مجموعات ذات أدلة** من I . وسنرمز لهذه الجماعة بالشكل $\{A_i\}, i \in I$ ، أو اختصاراً بـ $\{A_i\}$ عندما تكون مجموعة الأدلة I معلومة . فمثلاً ، إذا كانت A_n هي المجموعة $\{x$ مضاعف لـ $A_n = \{x : n$ حيث n عدد صحيح موجب ، فإن الجماعة $\{A_n\}, n \in N$ ليست الا الجماعة $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ، حيث

$$A_1 = \{1,2,3,\ldots\} \ , \ A_2 = \{2,4,6,\ldots\} \ , \ A_3 = \{3,6,9,\ldots\}$$

هذا ، ونقول عن $\{A_i\}, i \in I$ إنها **جماعة خالية** من المجموعات إذا كان $I = \emptyset$.

١,١٩٩ — تعريف

لتكن I مجموعة أدلة و X مجموعة كلية و $\{A_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعات الجزئية من X مجموعة أدلتها I . عندئذ :

(١) يطلق اسم **اجتماع** الجماعة $\{A_i\}, i \in I$ على مجموعة كل العناصر من X التي ينتمي كل منها إلى إحدى المجموعات A_i على الأقل ، ونرمز لهذا الاجتماع بـ $\bigcup_{i \in I} A_i$ أو إختصاراً بـ $\cup_i A_i$ وبالتالي ، فإن

$$\cup_i A_i = \{x : I \text{ من } i \text{ من أجل عنصر ما } x \in A_i\}$$

يترتب على هذا التعريف أنه إذا كانت $\{A_i\}, i\in I$ جماعة خالية من المجموعات (أي $I = \varnothing$)، فإن $\cup_I A = \varnothing$

(٢) يطلق إسم **تقاطع** الجماعة $\{A_i\}, i\in I$ على مجموعة كل العناصر من X التي ينتمي كل منها إلى جميع المجموعات A_i في آن واحد ، أي على مجموعة العناصر المشتركة بين كل مجموعات الجماعة ، ونرمز لهذا التقاطع بـ $\bigcap_{i\in I} A_i$ ، أو اختصاراً بـ $\cap_I A_i$. وبالتالي ، فإن $\cap_I A_i = \{x : x\in A_i$ ايا كان i من $I\}$
يترتب على هذا التعريف أنه إذا كانت الجماعة $\{A_i\}, i\in I$ خالية ، فإن $\cap_I A_i = X$.

(٣) نعرف **جداء** (أي **حاصل ضرب**) الجماعة $\{A_i\}, i\in I$ ، الذي نرمز له بـ $\prod_{i\in I} A_i$، أو اختصاراً بـ $\Pi_I A_i$ ، على أنه مجموعة كل الجماعات $\{a_i\}, i\in I$ ، حيث $a_i \in A_i$ ، أياً كان i من I .

وفي الحالة التي تكون فيها مجموعة الأدلة I منتهية ومؤلفة من n عنصراً مثلاً ، فمن الممكن اعتبار I المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ ، كما يمكن كتابة الجداء عندئذ على الشكل $\prod_{i=1}^{n} A_i$، أو $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$. وفي هذه الحالة ، يمكن كتابة الجماعة $\{a_i\}, i\in I$ على النمط $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ ، وتدعى **مُرَتَّبةً** n . فإذا تقيدنا بهذه الرموز ، فإننا نجد

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) : a_1 \in A_1 , a_2 \in A_2 , \ldots , a_n \in A_n\}$$

وعندما $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ ، فإننا نرمز للجداء السابق بـ A^n ، إذن
$$A^n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) : a_1,a_2,\ldots,a_n \in A\}$$
سنورد الآن نظرية تشكل تعميماً لدستوري التوزيع الواردين في النظرية (١,٩١) .

١,١٩٩١ — نظرية

إذا كانت $\{A_i\}, i\in I$ ، جماعة من المجموعات الجزئية من مجموعة كلية X ، وكانت B مجموعة جزئية من X أيضاً ، فإن

$$B\cup (\cap_I A_i) = \cap_I (B\cup A_i)$$
$$B\cap (\cup_I A_i) = \cup_I (B\cap A_i)$$

البرهان

سنكتفي بإقامة البرهان على المساواة الأخيرة .
ليكن x عنصراً من $B\cap (\cup_I A_i)$. لما كان $x\in \cup_I A_i$ ، فهنالك i من I بحيث $x\in A_i$. فإذا أضفنا إلى ذلك أن $x\in B$ ، وجدنا أن $x\in B\cap A_i$. وبالتالي فإن $x\in \cup_I (B\cap A_i)$. إذن $B\cap (\cup_I A_i)\subseteq \cup_I (B\cap A_i)$.

لنفترض الآن أن x عنصر من $\cup_I (B\cap A_i)$. إذن هنالك i من I ، بحيث $x\in B\cap A_i$. وهذا يعني أن $x\in A_i$ و $x\in B$ ، الأمر الذي ينتج عنه أن $x\in \cup_I A_i$ و $x\in B$ ،أي $x\in B\cap (\cup_I A_i)$. وينتج عن هذا أن

$$\cup_I (B\cap A_i)\subseteq B\cap (\cup_I B_i)$$

لذا فإن المساواة المطلوب إثباتها صحيحة .■

هذا ، وإذا كانت B' في النظرية السابقة اجتماعاً أو تقاطعاً لجماعة من المجموعات ، فإننا نجد التعميم التالي الذي نترك إثباته للقارىء ، مستعيناً بطريقة برهان النظرية السابقة .

١,١٩٩٢ — نظرية

لتكن $\{A_i\}, i\in I$ و $\{B_j\}, j\in J$ جماعتين من المجموعات الجزئية من مجموعة كلية ما . عندئذ يكون :

$$(\cap_I A_i)\cup (\cap_J B_j)= \cap_{I\times J}(A_i\cup B_j) \quad (١)$$

$$(\cup_I A_i)\cap (\cup_J B_j) = \cup_{I\times J}(A_i\cap B_j) \quad (٢)$$

ونترك للقارىء ، إثبات النظرية التالية باتباع أسلوب مماثل لذلك الذي سلكناه في برهان النظرية (١,١٩٢) .

١,١٩٩٣ — دستورا دي مورغان De Morgan المعممان :

إذا كانت $\{A_i\}, i\in I$ جماعة من المجموعات الجزئية من مجموعة كلية X ، فإن :

$$X-\cup_I A_i = \cap_I(X-A_i)$$
$$X-\cap_I A_i = \cup_I(X-A_i)$$

١,٢ — العلاقات
Relations

١,٢١ — تعريف (العلاقة)

نسمي كل مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$ **علاقة ثنائية** بين عناصر A وعناصر B ، أو **علاقة في** $A \times B$ ، أو **علاقة من** A **إلى** B . وتسمى مجموعة المساقط الأولى في كل الأزواج المرتبة المؤلفة للعلاقة ، **ساحة** أو **مجموعة تعريف** أو منطلق العلاقة ، كما تسمى مجموعة المساقط الثانية في كل الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى العلاقة **مدى** ، أو مجموعة قيم، أو **مستقر** العلاقة .

وبوجه خاص ، فإن كل مجموعة جزئية من المجموعة $A \times A$ ، تسمى **علاقة بين عناصر** A ، (أو علاقة في A^2 ، أو علاقة على A) .

وعلى سبيل المثال ، فإن كان $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$ فإن

$$\Gamma_1 = \{(1,4),(3,4)\}$$

هي **علاقة** بين عناصر A وعناصر B، ساحتها $\{1,3\}$ ومداها $\{4\}$. كذلك ، فإن

$$\Gamma_2 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(5,5)\}$$

هي **علاقة** بين عناصر A ، تشكل المجموعة $A = \{1,3,5\}$ كلاً من ساحتها ومداها .

وبوجه عام ، فإن ساحة العلاقة Γ بين عناصر A وعناصر B ، هي المجموعة $\{x \in A : (x,y) \in \Gamma\}$، ومداها المجموعة $\{y \in B : (x,y) \in \Gamma\}$.

هذا وإذا كانت Γ علاقة في $A \times B$ ، وكان $(x,y) \in \Gamma$ ، فإننا نقول إن (x,y) يحقق العلاقة Γ (أو إن y يرتبط بـ x وفق العلاقة Γ) ونكتب $x\Gamma y$. وإذا كان $(x,y) \notin \Gamma$ ، فإننا نقول أن (x,y) لا يحقق العلاقة Γ ، ونكتب $x \not\Gamma y$. وهكذا فلدينا مثلاً : $3\Gamma_1 4$ و $1\not\Gamma_2 5$ و $1\Gamma_2 3$.

لقد عينا كلاً من العلاقتين Γ_1, Γ_2 بأن وضعنا جميع الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى كل منها ضمن قوسين. ويدعى هذا الأسلوب في تعيين العلاقة **بالطريقة الجدولية** . بيد أن هنالك أسلوباً آخر لتعيين العلاقة هو التالي .

١.٢٢ — أسلوب الخاصة المُحَدِّدَة

لنفرض x **متغيراً** في المجموعة A و y متغيراً آخر في المجموعة B (A,B قد تكونان متساويتين أو مختلفتين) . لتكن $C(x,y)$ جملة تحوي **المتغيرين** x,y ، وتتصف بخاصة كونها صحيحة أو خاطئة عند تعويض x بعنصر من A و y بعنصر من B . عندئذ ، نسمي $C(x,y)$ خاصة محددة في $A \times B$. فمثلاً ، إذا كان

$$A = \{2,3,4\} \quad , \quad B = \{3,4,5,6\} \qquad (\circ)$$

وكانت $C(x,y)$ هي الجملة « $x|y$ » ، التي تعني أن x يقسم y ، فإن هذه الجملة صحيحة عندما $x=2\ ,\ y=4$ مثلاً ، وخاطئة عندما $x=3\ ,\ y=5$.

وهكذا ، فإن الخاصة المُحَدِّدة $C(x,y)$ في مجموعة $A \times B$ تقسم هذه المجموعة إلى مجموعتين جزئيتين : مجموعة العناصر التي تحقق الخاصة ، ومجموعة العناصر التي لا تحققها . ونرمز لمجموعة العناصر التي تحقق هذه الخاصة بالشكل $\Gamma = \{(x,y) \in A \times B:\ C(x,y)\}$ ، أو بالشكل

$$\Gamma = \{(x,y):\ C(x,y)\}$$

عند عدم إمكان الالتباس . ومن الواضح أن Γ هي العلاقة بين عناصر A,B التي تحقق الخاصة $C(x,y)$. وهكذا ، فإن العلاقة بين عناصر المجموعتين ($\circ$) التي خاصتها المحدِّدَة « x (من A) يقسم y (من B)» يمكن أن تكتب بالشكل الجدولي $\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\}$ ، أو على النمط التالي :

$$\{(x,y) \in A \times B : x|y\}$$

وتجدر الإشارة إلى أنه غالباً ما يشار إلى الخاصة $C(x,y)$ المحددة للعلاقة Γ على أنها العلاقة Γ تجاوزاً . وعلى هذا ، فمن الممكن الكلام عن « علاقة التراجح $>$ » أو « علاقة التراجح أو التساوي $\geq$ » أو « علاقة التساوي $=$ » بين عناصر N . كذلك يمكن الكلام عن « علاقة الاحتواء $\subseteq$ » بين عناصر مجموعة أجزاء مجموعة .

هنالك علاقة تشغل مركزاً ممتازاً بين جميع فروع العلوم الرياضية ، ألا وهي علاقة التكافؤ .

١.٢٣ — تعريف (علاقة التكافؤ)

لتكن E علاقة على مجموعة A . تسمى E **علاقة تكافؤ** على A ، إذا توفرت في E خواص الانعكاس والتناظر والتعدي ، التي نعرفها فيما يلي :

(١) نقول عن علاقة E بين عناصر مجموعة A إنها **منعكسة** في A ، إذا تحقق الشرط aEa (أي $(a,a) \in E$) أياً كان a من A .

وعلى سبيل المثال ، فإن العلاقة « a يشابه b » المعرفة على مجموعة المثلثات في المستوى منعكسة . لأن أي مثلث مشابه لنفسه . أما العلاقة « a صديق b » المعرفة على مجموعة بني البشر ، فليست منعكسة . كذلك فإن العلاقة « A محتواة تماماً في B » المعرفة على مجموعة أجزاء مجموعة ليست منعكسة .

(٢) نقول عن علاقة E بين عناصر مجموعة A إنها **متناظرة في A** إذا كان $aEb \Rightarrow bEa$ ، (أي $(a,b)\in E \Rightarrow (b,a)\in E$) .

وعلى هذا ، فإن العلاقتين الأوليين الواردتين في (١) متناظرتان ، ذلك أنه إذا كان المثلث a يشابه b ، فإن المثلث b يشابه a ، وإذا كان a صديقاً لـ b فإن b صديق لـ a . أما العلاقة الأخيرة في (١) فمن الواضح أنها غير متناظرة . كذلك فإن علاقة التراجح « a أكبر من b » ، المعرفة على مجموعة عددية غير متناظرة أيضاً .

(٣) نقول من علاقة E بين عناصر مجموعة A إنها متعدية في A . إذا تحقق الشرط :

$$aEb, bEc \Rightarrow aEc$$

(أي الشرط : $(a,b)\in E, (b,c)\in E \Rightarrow (a,c)\in E$)

فمثلاً ، نرى بوضوح أن علاقة التشابه المعرفة على مجموعة المثلثات ، وعلاقة الاحتواء التام المعرفة على مجموعة أجزاء مجموعة ، وعلاقة التراجح على مجموعة عددية،كلها علاقات متعدية . أما العلاقتان « a صديق b » المعرفة على مجموعة الناس ، و « a عمودي على b » المعرفة على مجموعة مستقيمات المستوى ، فليستا متعديتين .

ويرمز عادة الى علاقة التكافؤ بـ $\sim$ أو $\equiv$ ، أو غيرهما.

وهكذا ، فإستناداً إلى تعريفنا لعلاقة التكافؤ ، نستنتج بيسر أن العلاقة « a يوازي b » هي علاقة تكافؤ على مجموعة مستقيمات فضاء ثنائي أو ثلاثي البعد ، كما أن العلاقة « a يشابه b » هي علاقة تكافؤ على مجموعة مثلثات هذا الفضاء .

١,٢٤ — تعريف (صفوف التكافؤ)

لتكن A مجموعة عليها علاقة تكافؤ $\sim$ ، وليكن a عنصراً من A . نسمي المجموعة الجزئية من عناصر A ، التي يكافىء كل منها a **صف تكافؤ** a ، ونرمز له بـ E_a . وهكذا ، فإن $E_a = \{x\in A : x\sim a\}$.

١,٢٥ — مثال

لتكن Γ_4 علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z بحيث أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $(x,y)\in\Gamma_4$ هو أن يكون $x-y$ قابلاً للقسمة على 4 . عندئذ نرمز لذلك بـ $x\equiv y \pmod 4$ ، ونقرأ هذا بالشكل « إن x,y

متطابقان من قياس 4 » . من السهل التحقق بأن Γ_4 علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة Z . وإذا لاحظنا أن أي عدد صحيح إذا قسم على 4 فإن باقي القسمة لا بد وأن يكون واحداً من الأعداد 0,1,2,3 . (أي لا بد أن يكون متطابقاً مع أحد الأعداد 0,1,2,3 من قياس 4) ، فإن هذا العدد لا بد وأن ينتمي إلى أحد صفوف التكافؤ الأربعة التالية :

$$E_0 = \{x \in Z : x \equiv 0(4)\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$
$$E_1 = \{x \in Z : x \equiv 1(4)\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$
$$E_2 = \{x \in Z : x \equiv 2(4)\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$
$$E_3 = \{x \in Z : x \equiv 3(4)\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

١.٢٦ — تعريف

لتكن A مجموعة ما . فإذا قسمنا A إلى جماعة من المجموعات الجزئية غير الخالية . التي كل منها منفصل عن المجموعات الباقية . والتي اجتماعها يساوي A . فاننا نقول بأن هذه الجماعة من المجموعات الجزئية تشكل **تجزئة** للمجموعة A . وعلى سبيل المثال . فإذا كانت $A = \{1, 2, \dots, 10, 11\}$ وكان

$$B = \{1,3,5,7\}\ ,\ C = \{2,4,6,8\}\ ,\ D = \{9,10,11\}$$

فإن الجماعة B,C,D تشكل تجزئة لـ A . لكن إذا استعضنا عن D بالمجموعة $D_1 = \{8,9,10,11\}$. أو بالمجموعة $D_2 = \{10,11\}$. فإن B,C,D_1 ليست تجزئة لـ A . لأن $C \cap D_1 \neq \emptyset$. كما أن B,C,D_2 ليست أيضاً تجزئة لـ A لأن $B \cup C \cup D_2 \neq A$.

ما كنا «لنحشر» التعريف السابق في بند العلاقات . لولا وجود رباط وثيق بين علاقة تكافؤ على مجموعة . وتجزئة هذه المجموعة . وهذا ما تعبر عنه النظرية التالية

١.٢٧ — نظرية

إن جماعة صفوف التكافؤ . التي تحددها علاقة تكافؤ $\sim$ على مجموعة A ، تشكل تجزئة لـ A .

البرهان

كي نبين أن جماعة صفوف التكافؤ $\{E_a\}, a \in A$. تشكل تجزئة لـ A نلاحظ ما يلي :

(١) ليكن a عنصراً ما من A . لما كان $a \sim a$. (لأن علاقة التكافؤ منعكسة) . فان $a \in E_a$ وبالتالي فإن $a \in \cup_A E_a$. يترتب على هذا ، أن $A \subseteq \cup_A E_a$. ولما كان من الواضح بأن $\cup_A E_a \subseteq A$ فإن $A = \cup_A E_a$.

(٢) سنبين الآن أن أي صفي تكافؤ مختلفين لا بد وأن يكونا منفصلين . لنفترض جدلاً أن E_a, E_b صفا تكافؤ مختلفان ، لكن $E_a \cap E_b \neq \emptyset$ .. عندئذ ثمة عنصر ، وليكن c مثلاً ، بحيث $c \in E_b$ و $c \in E_a$. إن هذا يعني أن $c \sim b$ و $c \sim a$. يترتب على كون علاقة التكافؤ $\sim$ متناظرة ومتعدية . أن $a \sim b$. لكن هذا ، يعني أن $E_a = E_b$ ، ذلك أنه إذا كان $x \in E_a$ فإن $x \sim a$. لكن $a \sim b$ ، إذن $x \sim b$ ، وبالتالي $x \in E_b$. نستنتج من هذا ، أن $E_a \subseteq E_b$. ونجد بصورة مماثلة أن $E_b \subseteq E_a$. وهكذا نجد أنه إذا افترضنا $E_a \cap E_b \neq \emptyset$ ، فاننا نجد $E_a = E_b$ وهذا خلاف الفرض . إذن $E_a \cap E_b = \emptyset$. ■

يطلق على مجموعة صفوف التكافؤ $\{E_a\}, a \in A$ ، الناجمة عن علاقة تكافؤ $\sim$ على مجموعة **A** إسم **مجموعة حاصل القسمة** ، ويرمز لها بـ $A/\sim$. وهكذا ، فإن مجموعة حاصل القسمة لعلاقة التكافؤ Γ_4 على مجموعة الأعداد الصحيحة Z والواردة في المثال (١٫٢٥) هي $Z/\Gamma_4 = \{E_0, E_1, E_2, E_3\}$.
إن عكس النظرية السابقة صحيح . وعلى وجه التحديد ترد النظرية التالية .

١٫٢٨ — نظرية

إن كل تجزئة لمجموعة A تحدد علاقة تكافؤ على A .

البرهان :

لتكن . $\{T_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعات الجزئية من A تشكل تجزئة لـ A . إن هذا يعني أن $A = \cup_i T_i$. وأنه إذا كان $T_i \neq T_j$. من أجل عنصرين ما i,j من I . فإن $T_i \cap T_j = \varnothing$. لنشكل علاقة E على A كما يلي : إن الشرط اللازم والكافي كي يكون $(x,y) \in E$. هو أن ينتمي العنصران x,y إلى نفس المجموعة T_i من التجزئة $\{T_i\}, i \in I$. سنبين أن E علاقة تكافؤ على A .

(١) ليكن x عنصراً ما من A . لما كان $A = \cup_i T_i$. فإن x ينتمي إلى مجموعة ما ولتكن T_i . وبالتالي . فإن $(x,x) \in E$ استناداً إلى تعريف E . وهكذا فإن E علاقة منعكسة .

(٢) إذا كان $(x,y) \in E$. فإن x,y ينتميان إلى مجموعة واحدة من مجموعات التجزئة . وبالتالي فإن $(y,x) \in E$ استناداً الى تعريف E . لذا . فإن E علاقة متناظرة .

(٣) ليكن $(y,z) \in E$ ، $(x,y) \in E$. إن هذا يعني، استناداً إلى تعريف E . أن x,y ينتميان إلى مجموعة واحدة T_i . وأن y,z ينتميان كذلك إلى مجموعة واحدة T_j . وبالتالي . فهنالك عنصر مشترك $y \in T_i \cap T_j$. إذن $T_i \cap T_j \neq \varnothing$. الأمر الذي يترتب عليه أن $T_i = T_j$. (لأنه لو لم تتحقق هذه المساواة لكان $T_i \cap T_j = \varnothing$) . نستنتج من هذا . أن x,y,z تنتمي إلى مجموعة واحدة T_i . وبوجه خاص . فإن x,z تنتمي إلى مجموعة واحدة من التجزئة . واستناداً إلى تعريف E . فإن $(x,z) \in E$. إذن E علاقة متعدية . ■

سنختتم بند العلاقات بتعريف علاقة الترتيب .

١٫٢٩ — تعريف (علاقة الترتيب الجزئي)

لتكن Γ علاقة على مجموعة A . تسمى Γ **علاقة ترتيب جزئي** على A إذا توفرت في Γ خواص الانعكاس واللاتناظر والتعدي . أما علاقتا الانعكاس والتعدي . فقد سبق وعرفناهما في (١٫٢٣) . وأما بالنسبة للاتناظر، فإننا نقول عن العلاقة Γ على A إنها **لا متناظرة**، إذا نتج عن كون $(b,a) \in \Gamma$ و $(a,b) \in \Gamma$ أن $a = b$. هذا . وإذا كانت Γ علاقة ترتيب جزئي على A ، فإننا نرمز لكون $(a,b) \in \Gamma$ على الشكل $a \prec b$. ونقول إن « a **يسبق** b » .

وعلى سبيل المثال ، فإن علاقة التراجح أو التساوي $\preccurlyeq$ ، المعرفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية . هي علاقة ترتيب جزئي على هذه المجموعة ، كما أن علاقة الاحتواء $\subseteq$ المعرفة على مجموعة أجزاء مجموعة A هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة قوة A ، أي على المجموعة 2^A .

هذا ، ونقول عن المجموعة A ، التي عرفنا عليها علاقة ترتيب جزئي $\preccurlyeq$. إنها **مجموعة مرتبة جزئياً** . ويرمز أحياناً إلى هذه المجموعة بالزوج المرتب $(A, \preccurlyeq)$.

لتكن $(A, \preccurlyeq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . إن الرمز $\prec$ يعني أن $a \preccurlyeq b$ ، وأن $a \neq b$. ونقول عندئذ إن « a **يسبق تماماً** b » . أما الرمز $b \succcurlyeq a$ فيعني أن $a \preccurlyeq b$. كما أن الرمز $b \succ a$ يعني أن $a \prec b$. وأخيراً . فإن الرموز $b \not\succ a$ و $b \not\succcurlyeq a$ و $a \not\prec b$ و $a \not\preccurlyeq b$ تعني نفي $b \succ a$ ، $b \succcurlyeq a$ ، $a \prec b$ ، $a \preccurlyeq b$ على الترتيب .

١.٢٩١ — تعريف

ليكن a,b عنصرين من مجموعة مرتبة جزئياً . فإذا لم يسبق أي من هذين العنصرين العنصر الآخر . أي إذا كان $b \not\preccurlyeq a$ و $a \not\preccurlyeq b$. قلنا إن هذين العنصرين **غير قابلين للمقارنة** .

وعلى سبيل المثال ، فإذا أخذنا المجموعة $A = \{a,b\}$. وشكلنا مجموعة أجزائها $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. فإن $(2^A, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . نلاحظ أن $\{a\}, \{b\}$ عنصران غير قابلين للمقارنة . في حين أن أي عنصرين من 2^A أحدهما $\emptyset$ أو $\{a,b\}$ قابلان للمقارنة .

١.٢٩٢ — تعريف (علاقة الترتيب الكلي)

نقول عن علاقة ترتيب جزئي $\preccurlyeq$ على مجموعة A إنها علاقة **ترتيب كلي** على A إذا كان أي عنصرين من A قابلين للمقارنة .

فمثلاً . إن علاقة التراجح أو التساوي $\preccurlyeq$ المعرفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية هي علاقة ترتيب كلي على هذه المجموعة . أما علاقة الترتيب الجزئي $\subseteq$ على 2^A في المثال الوارد في (١.٢٩١) فليست علاقة ترتيب كلي .

هذا ، ونقول عن $(A, \preccurlyeq)$ ، حيث $\preccurlyeq$ علاقة ترتيب كلي . إنها **مجموعة مرتبة كلياً** . ونترك للقارىء التحقق من صحة النظرية التالية .

١.٢٩٣ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون $(A, \preccurlyeq)$ مجموعة مرتبة كلياً هو أن تتحقق الشروط التالية :

(١) أياً كان العنصران a,b من A فلا بد أن تتحقق واحدة فقط مما يلي : $a = b$ أو $a \prec b$ أو $b \prec a$.
وبعبارة أخرى ، فإذا كان a,b عنصرين مختلفين من A ، فإن أحدهما لا بد وأن يسبق تماماً العنصر الآخر .

(٢) إذا كان $a \prec b$ و $b \prec c$ ، فإن $a \prec c$. وبعبارة أخرى ، فان العلاقة $\prec$ متعدية .

١,٣ — الـدوال
Functions

سننتقل الآن إلى تعريف يعتبر بحق أهم ما جاد به علم الرياضيات ، ألا وهو تعريف الدالة .

عند دراستنا للدوال في باكورة دراستنا للحساب التفاضلي والتكاملي،كنا نفهم الدالة على أنها قاعدة تمكننا من مقابلة كل عدد حقيقي x من مجموعة عددية بعدد حقيقي y . وعلى سبيل المثال ، فان الدالة المعطاة بالدستور $y=2x^2+x-1$ ، هي قاعدة تمكننا من مقابلة كل قيمة للمتغير المستقل x بقيمة للدالة هي $2x^2+x-1$. التي كنا نسميها قيمة الدالة عند النقطة x . إن نقطة الضعف في هذا الوصف للدالة تكمن في غموض كلمة «قاعدة»أوكلمة « دستور» . ولما كان استخدام الدوال لا يخلو منه تقريباً أيّ من مواضيع التحليل الرياضي . وجب علينا إيجاد تعريف دقيق للدوال . ومن حسن الحظ ، فإن نظرية العلاقات الواردة في البند السابق (١.٢) توفر لنا الأساس المكين للوصول إلى هدفنا هذا .

١,٣١ — تعريف (الدالة)

نقول عن علاقة f إنها **دالة** (أو تابع أو راسم أو مؤثر أو تطبيق أو تحويل)،إذا نتج عن $(x,z)\in f$ و $(x,y)\in f$ أن $y=z$. وبالتالي ، فان **ساحة** (أو **مجموعة تعريف**) الدالة f هي مجموعة المساقط الأولى للأزواج المرتبة المشكلة لِـ f ، وسنرمز لها غالباً بـ $\mathcal{D}(f)$ ، كما أن **مدى** (أو **مجموعة قيم**) الدالة f هي مجموعة المساقط الثانية للأزواج المرتبة المنتمية إلى f ، وسنرمز لها غالباً بِـ $\mathcal{R}(f)$.

نستنتج من تعريف الدالة أنه يقابل كل عنصر x من $\mathcal{D}(f)$ عنصر وحيد y ، بحيث $(x,y)\in f$. يسمى العنصر y هذا **قيمة** f في (أو عند) x ، ويرمز لهذا العنصر بـ $f(x)$. كذلك فمن الممكن تسمية y (أو $f(x)$) **خيال** x وفق f . وعلينا أن نميِّز بين الدالة f نفسها وبين القيمة $f(x)$ للدالة f في x . ويغدو هذا الفرق هاماً عندما نكون خيالَ دالة ساحتها مؤلفة من دوالّ . وهكذا ، فمن الممكن التعبير عن f بالشكل $f=\{(x,f(x)):x\in\mathcal{D}(f)\}$ ، أو بالشكل $f=\{(x,y):y=f(x),x\in\mathcal{D}(f)\}$.

لتكن X,Y مجموعتين ، ولتكن f دالة ساحتها X ومداها محتوى في Y . تسمى f عندئذ **دالة من** X **الى** Y ، (**أو دالة من** X (**أو لِـ** X) **في** Y ، أو **دالة معرفة على** X **وتأخذ قيمها في** Y)،ونشير إلى هذا بالرمز $f:X\to Y$. تسمى Y أحياناً **مجموعة وصول** الدالة f

هذا ، وإذا كان $Y = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية) ، فإن الدالة $f : X \to \mathbb{R}$ تدعى **دالة حقيقية القيم** ، أو اختصاراً **دالة حقيقية** . وإذا كان فضلاً عن ذلك $X \subseteq \mathbb{R}$ ، فإننا نسمي الدالة $f : X \to \mathbb{R}$ **دالة حقيقية للمتغير الحقيقي** .

ومن المناسب أحياناً استعمال الرمز « $x \to f(x), x \in A$ » الذي يعني أن f دالة ساحتها A وقيمتها في x (من A) هي $f(x)$. وهكذا ، فمن الممكن التعبير عن الدالة $\{(x, \sin x) : x \in \mathbb{R}\}$ على الشكل « $x \to \sin x, x \in \mathbb{R}$ » .

لما كانت الدالة هي مجموعة (من الأزواج المرتبة) ، فإننا نستنتج مباشرة استناداً لتعريف تساوي مجموعتين النظرية التالية .

١,٣٢ ــ نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تتساوى دالتان f, g هو أن يكون لهما ساحة واحدة ، وأن يكون $f(x) = g(x)$ أياً كان x من ساحتهما المشتركة هذه .

١,٣٣ ــ ملاحظة

لما كانت الدالة هي عبارة عن مجموعة ، فمن الممكن أن تكون الدالة خالية . والدالة الخالية دالة ساحتها خالية بالضرورة ، ذلك أنه اذا كانت ساحة دالة ما غير خالية ، فلا يمكن أن يكون مداها خالياً ، وبالتالي ، تغدو الدالة غير خالية . كذلك فإن مدى الدالة الخالية خال ، ذلك أنه لو كان المدى غير خالٍ ، كانت الساحة غير خالية ، وغدت الدالة بالتالي غير خالية .

١,٣٤ ــ أمثلة

(١) إن $f = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ دالة ساحتها المجموعة $A = \{1,2,3\}$ ، ومداها المجموعة $\{2,4,6\}$. ويمكن التعبير عن f هنا بالشكل $\{(x,y) : y = 2x, x \in A\}$ ، (أو بالشكل $f(x) = 2x, x \in A$ ، أو بالشكل $\{(x,2x) : x \in A\}$ ، أو بالشكل $x \to 2x, x \in A$) . وواضح هنا ، أن هذه الدالة تختلف عن الدالة $\{(x,y) : y = 2x, x \in N\}$ بسبب اختلاف الساحتين،رغم أن لكل من الدالة f والدالة الأخيرة دستوراً واحداً هو $y = 2x$.

(٢) إن العلاقة $\{(1,2), (2,4), (3,6), (3,8)\}$ ليست دالة بسبب وجود عنصرين مختلفين $(3,6)$ و $(3,8)$ لهما نفس المسقط الأول 3 . كذلك فإن العلاقة $\{(x,y) : y^2 = x^2, x \in N\}$ ليست دالة كذلك،لأن $(1,1)$ و $(1,-1)$ عنصران مختلفان في هذه العلاقة لهما نفس المسقط الأول 1 .

(٣) إن العلاقة f ، التي ساحتها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، والمحددة بالدستور $f(x)=x^2$ ، دالة مداها مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة . تسمى هذه الدالة **الدالة التربيعية** .

(٤) لتكن X . مجموعة غير خالية ، وليكن c شيئاً ما . لنعرف f على أنها المجموعة $\{(x,c) : x \in X\}$. من السهل ملاحظة أن f دالة ساحتها X ، ومحددة بالدستور $f(x)=c$ أياً كان x من X . تدعى هذه الدالة **الدالة الثابتة** . إن مدى هذه الدالة هو المجموعة وحيدة العنصر $\{c\}$.

(٥) لتكن X مجموعة غير خالية ، ولتكن f المجموعة $f = \{(x,x) : x \in X\}$ ، إذن f هي الدالة التي كل من ساحتها ومداها المجموعة X ، بحيث يكون خيال كل عنصر x وفق f هو x نفسه . وبعبارة أخرى، فان f دالة ساحتها X ومحددة بالدستور $f(x)=x$ أياً كان x من X . تسمى هذه الدالة **الدالة المُطَابِقة** أو **دالة المُطَابَقَة على X** ، ويرمز لها بـ I_X .

(٦) ليس من الضروري أن تكون ساحة أو مدى الدالة مجموعة عددية . فالدالة التي ساحتها مجموعة كلمات اللغة العربية ، والتي خيال أي كلمة وفقها هو حرفها الأول، هي دالة مداها مجموعة الحروف الأبجدية العربية ، وبالتالي فساحتها ومداها ليسا مجموعتين عدديتين . كذلك ، فالدالة التي خيال كل إنسان وفقها هو والدته ، هي دالة معرفة على مجموعة بني البشر (عدا آدم وحواء) ، ومداها مجموعة جزئية تماماً من مجموعة النساء .

١.٣٦ — تعريف (الدالة لمتغيرين)

نقول عن دالة f ، ساحتها مؤلفة من أزواج مرتبة، إنها **دالة لمتغيرين** . فإذا كان (x_1, x_2) عنصراً من ساحة f ، فإننا نرمز لخيال هذا العنصر وفق f بالشكل $f(x_1, x_2)$ بدلاً من $f((x_1,x_2))$. وهكذا ، فإن الدالة لمتغيرين f التي ساحتها $\mathcal{D}(f)$ ما هي الا المجموعة

$$f = \{((x_1,x_2),y) : y = f(x_1,x_2) , (x_1,x_2) \in \mathcal{D}(f)\}$$

واستناداً إلى تعريف الثلاثي المرتب (١.١٩٦) ، فإن

$$f = \{(x_1,x_2,y) : y = f(x_1,x_2) , (x_1,x_2) \in \mathcal{D}(f)\}$$

لذا ، فإن الدالة لمتغيرين هي مجموعة من الثلاثيات المرتبة .

١.٣٧ — مثال

لتكن X مجموعة ما ، ولتكن 2^X مجموعة أجزائها . إن الدالة $f: 2^X \times 2^X \to 2^X$ ، والمعرفة بالدستور $f(A,B) = A \cup B$ أياً كانت المجموعتان الجزئيتان A,B من X ، هي دالة لمتغيرين . ومدى هذه الدالة هو المجموعة 2^X بأكملها ، ذلك أنه أياً كانت المجموعة الجزئية A من X (أي العنصر A من 2^X) فإنه قيمة لـ f ، لأن $f(A,\varnothing) = A \cup \varnothing = A$.

١,٣٨ — تعريف (الخيال المباشر والخيال العكسي)

لتكن لدينا الدالة $f:X \to Y$ ، ولتكن A مجموعة جزئية من الساحة X . إن **الخيال المباشر** لـ A وفق f هو مجموعة أخيلة جميع عناصر A وفق f . فاذا رمزنا له بـ $f(A)$،فإن $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. لاحظ أنه إذا كان $x \in \mathcal{D}(f)$ ، فإن $f(\{x\}) \neq f(x)$ لأن $f(\{x\})$ هي المجموعة $\{f(x)\}$.

كذلك ، إذا كانت لدينا الدالة $f:X \to Y$ وكانت B مجموعة جزئية من Y ، فإن **الخيال العكسي** لـ B وفق f هو مجموعة عناصر X ، التي خيال كل منها وفق f ينتمي الى B . وإذا رمزنا لهذا الخيال العكسي بـ $f^{-1}(B)$ فإن $f^{-1}(B) = \{x : x \in X, f(x) \in B\}$.

لاحظ أن التعريف الأخير لا يشترط في B أن تكون مجموعة جزئية من $\mathcal{R}(f)$. وفي الحقيقة ، فإذا كان $B \cap \mathcal{R}(f) = \varnothing$ فإننا نجد $f^{-1}(B) = \varnothing$. كذلك علينا ملاحظة أنه إذا كانت B مجموعة جزئية وحيدة العنصر من $\mathcal{R}(f)$ ، فليس من الضروري أن يكون خيالها العكسي وفق f مجموعة وحيدة العنصر كذلك . وعلى سبيل المثال ، إذا أخذنا الدالة f التي ساحتها $\mathbb{R}$ والمعرفة بالدستور $f(x) = x^2$ ، فإن $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.

١,٣٩ — مثال

لتكن f دالة ساحتها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ومحددة بالدستور $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. بما أن $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ فإننا نستنتج بسهولة أن مدى f هو المجموعة $\{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq \frac{4}{3}\}$. فإذا كانت $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ ، فإن $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq \frac{1}{7}\}$. وإذا كانت $A = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$ فإن $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$. كذلك ، فإذا كانت $B = \{y : y \leq \frac{4}{19}\}$ ، فإن $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{3}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{5}{2}\}$. أما إذا كانت $B = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 0\}$ ، فإن $f^{-1}(B) = \varnothing$.

١,٣٩١ — نتيجة

يترتب على تعريف الخيال المباشر والخيال العكسي لمجموعة وفق دالة ، أن $f(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

١,٣٩٢ — نظرية

لتكن $f:X \to Y$ دالة ما ، ولتكن A, B مجموعتين جزئيتين من X . عندئذ :

(١) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(٢) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(٣) $f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$ ..

(٤) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $f(A) \subseteq f(B)$.

البرهان

(١) إذا كانت إحدى المجموعتين (على الأقل) A أو B خالية فإن المساواة (١) صحيحة. سنبين هذا مثلاً في الحالة $B = \varnothing$. في هذه الحالة يكون $f(B) = \varnothing$. إذن

$$f(A \cup B) = f(A \cup \varnothing) = f(A) = f(A) \cup \varnothing = f(A) \cup f(B)$$

لننتقل إلى الحالة العامة حيث كل من A, B مجموعة غير خالية.

سنبين أولاً أن $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. ليكن $y \in f(A \cup B)$. إذن هنالك عنصر x من $A \cup B$ بحيث $f(x) = y$. وهكذا، فإن $x \in A$ أو $x \in B$. فإذا كان $x \in A$ فإن $f(x) = y \in f(A)$. وإذا كان $x \in B$ فإن $f(x) = y \in f(B)$. وبالتالي، فإن $y \in f(A) \cup f(B)$. لذا فإن علاقة الاحتواء المطلوب إثباتها صحيحة.

سنثبت الآن صحة الاحتواء العكسي، أي $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. ليكن $y \in f(A) \cup f(B)$. إذن $y \in f(A)$ أو $y \in f(B)$. فإذا كان $y \in f(A)$ ، فهنالك عنصر من A خياله وفق f هو y . وإذا كان $y \in f(B)$ ، فهنالك عنصر من B خياله وفق f هو y . وبالتالي، فهنالك عنصر، وليكن x ، ينتمي إلى A أو B بحيث يكون $f(x) = y$. وهذا يعني أن $x \in A \cup B$ بحيث $f(x) = y$. ويترتب على هذا أن $y = f(x) \in f(A \cup B)$. لذا، فإن علاقة الاحتواء الثانية المطلوب إثباتها صحيحة. وواضح أن علاقتي الاحتواء تعطياننا علاقة المساواة المطلوبة (١).

(٢) إذا كان $A \cap B = \varnothing$ ، فإن $f(A \cap B) = \varnothing$ ، وبالتالي، فالعلاقة (٢) صحيحة (لأن المجموعة الخالية محتواة في أي مجموعة). لنأخذ الحالة العامة $A \cap B \neq \varnothing$ ، وبالتالي $f(A \cap B) \neq \varnothing$. لنفترض $y \in f(A \cap B)$. عندئذ هنالك عنصر x من $A \cap B$ بحيث $f(x) = y$. إن $x \in A$ و $x \in B$ في آن واحد. يترتب على أن $x \in A$ و $f(x) = y$ أن $y \in f(A)$. كذلك، نستنتج من أن $x \in B$ و $f(x) = y$ أن $y \in f(B)$. إذن $y \in f(A) \cap f(B)$. وبالتالي، فعلاقة الاحتواء (٢) صحيحة.

(٣) من الواضح صحة العلاقة (٣) عندما $f(A) - f(B) = \varnothing$ ، (لأن المجموعة الخالية محتواة في أي مجموعة). لنأخذ الحالة العامة $f(A) - f(B) \neq \varnothing$ ، وليكن $y \in f(A) - f(B)$. إذن $y \in f(A)$ و $y \notin f(B)$. يترتب على $y \in f(A)$ أن ثمة x' من A بحيث $f(x') = y$. ولما كان $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$ ، فإننا نستنتج أن $f(x') = y \notin \{f(x) : x \in B\}$ ، الأمر الذي يتعين عليه أن $x' \notin B$. لذا، فإن $x' \in A - B$. إذن $f(x') \in f(A - B)$. لكن $y = f(x')$ ، إذن $y \in f(A - B)$. وبذا يتم التحقق من صحة علاقة الاحتواء (٣).

(٤) إذا كان $A = \emptyset$ فإن $f(A) = \emptyset$ ، وبالتالي فالعلاقة (٤) صحيحة (لأن المجموعة الخالية محتواة في أي مجموعة) . لنأخذ الحالة العامة $A \neq \emptyset$ ، وبالتالي $f(A) \neq \emptyset$. ليكن $y \in f(A)$. إذن يوجد x من A بحيث $f(x) = y$. ولما كان $A \subseteq B$ فإن $x \in B$. لذا فإن $f(x) \in f(B)$. وبما أن $y = f(x)$ ، فإننا نجد $y \in f(B)$. إذن $f(A) \subseteq f(B)$ حقاً . ■

وتجدر بنا الإشارة هنا إلى أن التساوي غير وارد في الحالة العامة في علاقتي الإحتواء (٢) و(٣) من النظرية السابقة . وعلى سبيل المثال ، لنأخذ الدالة الثابتة $f:\{a,b\} \to \{c\}$ ، فإذا رمزنا بـ X و A و B للمجموعات $\{a,b\}$ و $\{a\}$ و $\{b\}$ على الترتيب،وجدنا $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ في حين أن $f(A) \cap f(B) = \{c\} \cap \{c\} = \{c\}$ وبالتالي ، فإن $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ في هـــذه الحالـــة . كـــذلك ، فـــإن $f(X - A) = f(B) = \{c\}$، في حين أن $f(X) - f(A) = \{c\} - \{c\} = \emptyset$. لذا فإننا نجد في هذه الحالة أيضاً أن $f(X - A) \neq f(X) - f(A)$. هذا ، ومن الممكن اتباع أسلوب مماثل لذلك الذي سلكناه في إثبات الشقين (١) و (٢) من النظرية السابقة للبرهان على النظرية التالية .

١,٣٩٣ — نظرية

لتكن $f: X \to Y$ دالة ما ، ولتكن $\{A_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعاتِ الجزئية من X . عندئذ يكون :

(١َ) $f(\cup_i A_i) = \cup_i f(A_i)$.

(٢َ) $f(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i f(A_i)$.

وفيما يتعلق بالخيال العكسي فترد النظرية التالية .

١,٣٩٤ — نظرية

لتكن $f: X \to Y$ دالة ما ، ولتكن A,B مجموعتين جزئيتين من Y . عندئذ :

(١) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(٢) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(٣) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

(٤) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

وإذا كانت $\{A_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعات الجزئية من Y ، فإن :

(١َ) $f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i)$.

(٢َ) $f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i)$.

البرهان

سنكتفي بإيراد البرهان على الشقين الأخيرين (١َ) و (٢َ) في الحالة العامة .

(أ) سنبين أولاً أن $f^{-1}(\cup_i A_i) \subseteq \cup_i f^{-1}(A_i)$. ليكن $x \in f^{-1}(\cup_i A_i)$. عندئذ يكون $f(x) \in \cup_i A_i$ ، وبالتالي ، يوجد دليل i من I ، بحيث $f(x) \in A_i$ ، الأمر الذي ينتج عنه $x \in f^{-1}(A_i)$. لذا ، فإن $x \in \cup_i f^{-1}(A_i)$. وبذا يتم إثبات علاقة الاحتواء .

ولإثبات علاقة الاحتواء العكسية $\cup_i f^{-1}(A_i) \subseteq f^{-1}(\cup_i A_i)$ نفرض $x \in \cup_i f^{-1}(A_i)$. عندئذ ، يوجد دليل i من I بحيث $x \in f^{-1}(A_i)$ ، وبالتالي ، نجد من أجل هذا الدليل $f(x) \in A_i$. إذن $f(x) \in \cup_i A_i$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن $x \in f^{-1}(\cup_i A_i)$. وبذا يتم إثبات علاقة الاحتواء العكسية .

إن علاقة الإحتواء الأولى بالإضافة إلى علاقة الاحتواء العكسية تبينان صحة المساواة (١َ) .

(٢َ) سنبين أولاً أن $f^{-1}(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i f^{-1}(A_i)$. ليكن $x \in f^{-1}(\cap_i A_i)$. عندئذ يكون $f(x) \in \cap_i A_i$ ، وبالتالي ، فإن $f(x) \in A_i$ أياً كان i من I ، الأمر الذي ينتج عنه أن $x \in f^{-1}(A_i)$ أياً كان i من I . لذا ، فإن $x \in \cap_i f^{-1}(A_i)$ ، وبذا يتم إثبات علاقة الإحتواء المطلوبة . ولإثبات علاقة الإحتواء العكسية $\cap_i f^{-1}(A_i) \subseteq f^{-1}(\cap_i A_i)$ ، نفترض $x \in \cap_i f^{-1}(A_i)$. عندئذ ، يكون $x \in f^{-1}(A_i)$ أياً كان i من I . وبالتالي ، فإن $f(x) \in A_i$ ، أياً كان i من I . إذن $f(x) \in \cap_i A_i$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن $x \in f^{-1}(\cap_i A_i)$. وبذا ، تكون علاقة الإحتواء العكسية صحيحة .

إن علاقة الاحتواء الأولى ، وعلاقة الإحتواء العكسية تبينان صحة المساواة (٢َ) .■

يترتب على الشق (٣) من النظرية السابقة ما يلي.

١,٣٩٥ — نتيجة

لتكن $f: X \to Y$ دالة ما ، ولتكن A مجموعة جزئية من Y . عندئذ يكون

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$$

لنورد الآن نظرية تعطينا علاقة هامة بين f, f^{-1} .

١,٣٩٦ — نظرية

لتكن $f: X \to Y$ دالة ، وليكن $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. عندئذ يكون :

(١) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

(٢) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

البرهان :

(١) إذا كان $A = \varnothing$ فمن السهل التحقق من صحة العلاقة . لنفترض الآن $A \neq \varnothing$ وليكن $x \in A$. عندئذ $f(x) \in f(A)$. واستناداً إلى تعريف الخيال العكسي لمجموعة وفق دالة نجد $x \in f^{-1}(f(A))$ ، وبذا يتم المطلوب .

(٢) إذا كان $B = \varnothing$ ، أو $B \neq \varnothing$ و $f^{-1}(B) = \varnothing$ ، فمن السهل التحقق من صحة العلاقة . لنفترض الآن $f^{-1}(B) \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ وليكن $y \in f(f^{-1}(B))$ ، إذن هنـــــالك x من $f^{-1}(B)$ بحيث $f(x) = y$. واستناداً إلى تعريف الخيال العكسي نجد $f(x) \in B$. وبالتالي ، فإن $y \in B$ ، وبهذا نجد المطلوب .■

١,٣٩٧ — تعريف (مقصور ومُمدّد دالة)

لتكن $f : X \to Y$ دالة ما ، ولتكن A مجموعة جزئية من X . نعرف **مقصور** f على A بأنه دالة،نرمز لها بـ $f|A$،من A الى Y بحيث يكون خيال كل عنصر x من A وفق $f|A$ يساوي $f(x)$. ومن الواضح أن الدالة $f|A$،موجودة وتتعين بشكل وحيد بالدالة f والمجموعة A :

$$f|A = \{ (x,y) : x \in A , y = f(x) \}$$

لنفترض الآن أن X^* مجموعة تحوي X . نعرف **ممدّد** الدالة $f : X \to Y$ الى X^* بأنه دالة g ساحتها X^* بحيث يكون خيال أي عنصر x من X وفق g يساوي $f(x)$. وبعبارة أخرى ، فإن g دالة مقصورها على X هو الدالة f .

يترتب على هذا التعريف ، أنه يمكن تشكيل عدة ممددات لدالة ما . وكمثال على المقصور نأخذ دالة القيمة المطلقة f التي ساحتها $\mathbb{R}$. من الواضح ، أن مقصور f على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة هو الدالة $f|\mathbb{R}^+$، بحيث أنه أياً كان العدد الموجب x فان $(f|\mathbb{R}^+)(x) = x$. كذلك نلاحظ أنه إذا رمزنا لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة بـ $\mathbb{R}^-$ فان $(f|\mathbb{R}^-)(x) = -x$ أياًكان العدد السالب x .

لنأخذ الآن الدالة f التي ساحتها $\mathbb{R} - \{1,-1\}$ والمعرفة بالدستور $f(x) = \dfrac{(x^2-1)(x+5)}{x^2-1}$. من السهل أن نلاحظ بأن الدالة g التي ساحتها $\mathbb{R} - \{-1\}$ والمعطاة بالدستور

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)(x+5)}{x^2-1} & (\text{عندما } x \neq -1 \text{ و } x \neq 1) \\ -2 & (\text{عندما } x = 1) \end{cases}$$

تشكل ممدّداً لِـ f الى $\mathbb{R} - \{1\}$. كما أن الدالة h التي ساحتها $\mathbb{R}$ والمعرفة بالدستور

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)(x+5)}{x^2-1} & (\text{عندما } x \neq -1 \text{ و } x \neq 1) \\ 4 & (\text{عندما } x = -1) \\ 6 & (\text{عندما } x = 1) \end{cases}$$

تشكل ممدداً لـ f الى $\mathbb{R}$.

١,٣٩٨ — تعريف (مركّبة دالتين)

لتكن $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ دالتين موضحتين في المخطط التالي :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \quad X \xrightarrow{g \circ f} Z$$

نقول عن الدالة من X الى Z ، التي يكون خيال كل عنصر x من X وفقها هو العنصر $g(f(x))$ من Z ، إنها **مركبة الدالتين** f و g (مأخوذتين بالترتيب f ثم g) ، ونرمز لهذه الدالة بـ $g \circ f$. وهذا يعني أن

$$g \circ f := \{(x,z) : x \in X, z = g(f(x))\}$$

نرى من هذا التعريف أنه كي تكون الدالة $g \circ f$ محددة، يجب أن تكون ساحة g هي مجموعة وصول الدالة f ، وعندما تكون الدالة $g \circ f$ محددة ، فإن ساحتها هي ساحة f ، ومجموعة وصولها هي مجموعة وصول g .

وعلى سبيل المثال ، لتكن f و g دالتين ساحة كل منهما $\mathbb{R}$: $f(x) = 3x + 1, g(x) = x^2 - 5$. عندئذ يكون :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 5 = 9x^2 + 6x - 4$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5) = 3(x^2 - 5) + 1 = 3x^2 - 14$$

إن هذا المثال يبين لنا أن عملية تركيب الدوال ليست تبديلية ، أي أنه في الحالة العامة $f \circ g \neq g \circ f$. لكن هذه العملية تجميعية كما تبين النظرية التالية.

١,٣٩٩ — نظرية

إن تركيب الدوال عملية ثنائية تجميعية ، أي أنه إذا كانت لدينا الدوال $h : Z \to S$ ، $g : Y \to Z$ ، $f : X \to Y$ فإن $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

البرهان

إن ساحة الدالة $(h \circ g) \circ f$ كما سبق وأشرنا في (١,٣٩٨) هي ساحة f . كذلك ، فإن ساحة $h \circ (g \circ f)$ هي ساحة $g \circ f$ ، وساحة $g \circ f$ هي ساحة f . وبالتالي ، فإن للدالتين $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ ساحة واحدة هي X . بقي علينا لإثبات صحة النظرية التحقق من أن لكل عنصر x من X نفس الخيال وفق هاتين الدالتين ، وهذا واضح مما يلي :

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

وبالتالي ، فالمساواة صحيحة . ■

ونترك للقارىء التحقق من صحة النظرية التالية .

١,٣٩٩١ — نظرية

لتكن $g\circ f: X\to Z$ مركبة الدالتين $f: X\to Y,\ g: Y\to Z$. عندئذ يكون :

(١) $(g\circ f)(A) = g(f(A))$ ، أياً كانت المجموعة الجزئية A من X .

(٢) $(g\circ f)^{-1}(c) = f^{-1}(g^{-1}(c))$ ، أياً كانت المجموعة الجزئية C من Z .

١,٣٩٩٢ — تعريف (الدالة المتباينة والدالة الغامرة)

نقول عن دالة $f: X\to Y$ إنها **متباينة** (أو دالة 1-1) إذا كان للعناصر المختلفة في X أخيلة مختلفة في Y . أي إذا اقتضت المساواة $f(x)=f(x')$ أن يكون $x=x'$. ونقول عن $f: X\to Y$ إنها دالة **غامرة** (أو دالة من X **على** Y) ، إذا كان أي عنصر y من Y خيالاً لعنصر x من X وفق f ، أي إذا كان y عنصراً من Y، وترتب على ذلك وجود عنصر x من X بحيث $f(x) = y$. ينتج مباشرة من هذا التعريف ومن تعريف الخيال المباشر لمجموعة وفق دالة أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f: X\to Y$ غامرة هو أن يكون $f(X)=Y$.

١,٣٩٩٣ — أمثلة

(١) من الواضح أن دالة المطابقة I_X على مجموعة X دالة متباينة وغامرة .

(٢) إن الدالة الخالية (١,٣٣) متباينة ، ذلك أنه لو لم تكن كذلك،لوجد عنصران مختلفان x,x' من ساحة الدالة لها خيال واحد وفق الدالة الخالية ، وهذا غير صحيح لأن ساحة الدالة الخالية ومداها مجموعتان خاليتان . كذلك فإن الدالة الخالية غامرة لأن ساحتها ومداها $\varnothing$ ولأنه لدينا دوماً $f(\varnothing) = \varnothing$ كما سبق وأسلفنا (١,٣٩١) .

(٣) إن الدالة $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرفة بـ $f(x)=x^2$ ليست متباينة ، لأنه إذا كان $x^2=x'^2$ ، فقد يكون $x=-x'$ وليس $x=x'$. كما أن هذه الدالة غير غامرة ، لأنه لا يوجد عدد x بحيث يكون خياله وفق f يساوي $y=-1$ مثلاً ، وفعلاً فأياً كان العدد الحقيقي x فإن $f(x)=x^2\neq -1$.

أما لو أخذنا الدالة $f: \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ والمعرفة بالدستور نفسه $f(x)=x^2$ فإن هذه الدالة متباينة ، لأنه إذا كان $x^2=x'^2$ فإن $x=x'$ (ولا يمكن أن يكون $x=-x'$ لأن $x, x'\in\mathbb{R}^+$) . كذلك فإن f هذه دالة غامرة،لأنه إذا كان y أي عنصر من مجموعة الوصول فإن $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$،أي أن هنالك عنصراً $\sqrt{y}$ من الساحة خياله وفق f هو y .

لتكن $f: X\to Y$ دالة ما ، ولنشكل العلاقة F بحيث أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $(x,y)\in F$ هو أن يكون $(y,x)\in f$ ، أي أن $F = \{(x,y): (y,x)\in f\}$. لقد أسمينا F علاقة ، لأنه ليس من الضروري أن تكون هذه العلاقة دالة . فمثلاً ، لنأخذ الدالة التربيعية $f = \{(x,y): y = x^2\}$ التي ساحتها $\mathbb{R}$. إن هذا يعني أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $(y,x)\in f$ هو أن يكون $x=y^2$. وبالتالي ، فإن F في هذه الحالة هي المجموعة $\bar{F} = \{(x,y): x = y^2\}$ التي ساحتها مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة . ولما كان $(1,1)$ و $(1,-1)$ عنصرين مختلفين من F لهما نفس المسقط الأول 1 ، فإن العلاقة F ليست دالة .

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها العلاقة F دالة فإنه يرد التعريف التالي .

١,٣٩٩٤ — تعريف

لتكن $f: X \to Y$ دالة ، ولنشكل العلاقة $F = \{ (x,y) : (y,x) \in f \}$. في الحالة الخاصة التي تكون فيها العلاقة F دالة ، فإننا نسميها **الدالة العكسية** للدالة f ، ونرمز لها بـ f^{-1} .
نستنتج من هذا التعريف أنه يوجد للدالة الخالية دالة عكسية هي الدالة الخالية كذلك .

١,٣٩٩٥ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون $f: X \to Y$ دالة متباينة وغامرة، هو أن تكون $F = \{ (x,y) : (y,x) \in f\}$ دالة متباينة ساحتها Y ومداها X .

البرهان

(١) لنفترض أولاً $f: X \to Y$ دالة متباينة وغامرة، وليكن $(x,y') \in F$ و $(x,y) \in F$. عندئذ ، يترتب على تعريف F أن $(y',x) \in f$ و $(y,x) \in f$. ولما كانت الدالة f متباينة فإن $y = y'$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنه إذا كان $(x,y') \in F$ و $(x,y) \in F$ فإن $y = y'$ ، وهذا يعني أن F دالة . لنفرض الآن $(x',y) \in F$ و $(x,y) \in F$. عندئذ ، يكون $(y,x') \in f$ و $(y,x) \in f$. ولما كانت f دالة ، فإن $x = x'$ ، وهذا يعني أن الدالة F متباينة . نلاحظ بعد ذلك أن $\mathcal{D}(F) = \{ x : (y,x) \in f \} = \mathcal{R}(f)$. ولما كان $\mathcal{R}(f) = Y$ لأن f دالة غامرة ، فإن المساواة الأخيرة تبين أن $\mathcal{D}(F) = Y$ ، أي أن ساحة F تساوي Y . وإذا لاحظنا أخيراً أن $\mathcal{R}(F) = \{ y : (y,x) \in f\} = \mathcal{D}(f) = X$ فإننا نستنتج أن مدى F هو المجموعة X .

(٢) لنفترض الآن أن $F = \{(x,y) : (y,x) \in f\}$ دالة متباينة ساحتها Y ومداها X، وليكن $(y,x') \in f$ و $(y,x) \in f$. عندئذ ، $(x',y) \in F$ و $(x,y) \in F$ ، وبما أن الدالة F متباينة ، إذن $x = x'$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنه يتعين على $(y,x') \in f$ و $(y,x) \in f$ أن $x = x'$ ، وهذا يعني أن f لا بد وأن تكون دالة . لنفترض الآن $(y',x) \in f$ و $(y'',x) \in f$. عندئذ $(x,y'') \in F$ و $(x,y') \in F$. وبما أن F دالة ، إذن $y' = y''$ ، الأمر الذي يعني أن الدالة f متباينة . نلاحظ الآن أن

$$X = \mathcal{R}(F) = \{ y : (y,x) \in f \} = \mathcal{D}(f)$$

وهذا يعني أن ساحة f هي X . كذلك ، لدينا

$$Y = \mathcal{D}(F) = \{ x : (y,x) \in f\} = \mathcal{R}(f)$$

وهذا يعني أن مدى الدالة f هو Y ، أي أن الدالة $f: X \to Y$ غامرة . ■

١,٣٩٩٦ — نتيجة

يترتب على النظرية والتعريف السابقين ، أنه إذا كانت $f: X \to Y$ دالة متباينة وغامرة،فإن لـ f دالة عكسية $f^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in f\}$. إن f^{-1} دالة متباينة ساحتها Y (أي مدى f) ومداها X (أي ساحة f) .

فمثلاً ، إذا أخذنا الدالة التي ساحتها $\mathbb{R}$ والمحددة بالدستور $f(x) = x^3$ ، فمن السهل التحقق من أنها متباينة وغامرة على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي ، فلها دالة عكسية f^{-1} ساحتها $\mathbb{R}$، ومعطاة بالدستور $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ، ذلك أن $f^{-1} = \{(x,y) : y = f^{-1}(x)\}$ من جهة ، ثم إن

$$f^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in f\} = \{(x,y) : x = f(y)\} = \{(x,y) : x = y^3\} = \{(x,y) : y = \sqrt[3]{x}\} .$$

١,٣٩٩٧ — نظرية .

لتكن $f^{-1} : Y \to X$ الدالة العكسية للدالة $f: X \to Y$. عندئذ

(١) إن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x = f^{-1}(y)$ هو $y = f(x)$.

(٢) إن $f^{-1} \circ f = I_X$ و $f \circ f^{-1} = I_Y$ ، حيث I_X و I_Y دالتا المطابقة على X و Y على الترتيب (١,٣٩٩٣) .

(٣) إن $(f^{-1})^{-1} = f$.

البرهان

(١) نستنتج من تعريف f^{-1} أن $(x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$. وبالتالي ، فإن $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

(٢) أياً كان x من X فإن $f^{-1}(y) = x$ أو $f^{-1}(f(x)) = x$ أي $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.
إذن $f^{-1} \circ f = I_X$. ونجد المساواة الثانية بصورة مماثلة .

(٣) لما كانت الدالة العكسية $f^{-1} : Y \to X$ متباينة وغامرة ، فلها دالة عكسية هي $(f^{-1})^{-1}$. وبتطبيق تعريف الدالة العكسية مرتين نجد $(f^{-1})^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in f^{-1}\} = \{(x,y) : (x,y) \in f\} = f$. ■

لما كان $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ استناداً إلى (١) من النظرية السابقة ، فكي نحصل على f^{-1} من f يكفي حل المعادلة $y = f(x)$ بالنسبة الى x فنجد الحل (الوحيد طبعاً) $x = f^{-1}(y)$. فمثلاً ، لإيجاد عكس الدالة ، التي ساحتها ومداها $\mathbb{R}$ والمعطاة بالدستور $f(x) = 3x + 5$ نضع $y = 3x + 5$ ، ثم نحل بالنسبة لِـ x فنجد $x = \frac{y-5}{3}$. إذن $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$. ولما جرت العادة على الرمز للمتغير بـ x ، فإن الدالة العكسية هي $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$ ، أي أن $f^{-1} = \{(x,y) : y = \frac{x-5}{3}\}$. كذلك ، لإيجاد عكس الدالة $f: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ المعطاة بالدستور $f(x) = \frac{3-x}{x-5}$ ، نحل المعادلة

$y = \frac{3-x}{x-5}$ بالنسبة لـ x فنجد $x = \frac{5y+3}{y+1}$ ، أي $f^{-1}(y) = \frac{5y+3}{y+1}$. وهذا يعني أن الدالة العكسيـــة $f^{-1}: \mathbb{R}-\{-1\} \rightarrow \mathbb{R}-\{5\}$ معطـــاة بـــالـــدستور $f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{x+1}$ ، أي أن $f^{-1} = \{(x,y) : y = \frac{5x+3}{x+1}\}$.

وتجدر الإشارة إلى أن الرمز $f^{-1}(B)$ لا يدل على الخيال المباشر لـ B وفق f^{-1} الا اذا كانت الدالة f^{-1} موجودة فعلاً . وفي الحالة العامة ، فإنه يعني الخيال العكسي لـ B وفق f . ومن الجدير بالذكر ، أنه في حال وجود الدالة f^{-1} فلا فرق بين الخيال المباشر لـ B وفق f^{-1} أو الخيال العكسي لـ B وفق f .

إن عكس الشق (٢) من النظرية (١,٣٩٩٧) صحيح . وعلى وجه التحديد ترد النظرية التالية ، التي نكلف القارىء بإقامة البرهان عليها .

١,٣٩٩٨ — نظرية

لتكن $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow X$ دالتين . فإذا كان $g \circ f = I_X$ و $f \circ g = I_Y$ حيث I_X و I_Y دالتا المطابقة على X و Y على الترتيب ، فإنه يوجد للدالة f دالة عكسية تساوي g ، أي أن $g = f^{-1}$.

من الممكن الإفادة من هذه النظرية لإثبات ما يلي.

١,٣٩٩٩ — نظرية

لتكن $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ دالتين لهما دالتان عكسيتان $f^{-1}: Y \rightarrow X$ و $g^{-1}: Z \rightarrow Y$. عندئذ توجد للدالة $g \circ f: X \rightarrow Z$ دالة عكسية هي $f^{-1} \circ g^{-1}: Z \rightarrow X$.

البرهان

يكفي استناداً إلى النظرية السابقة إثبات أن

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_Z \quad \text{و} \quad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_X$$

وفي الحقيقة ، فإذا أفدنا من النظرية (١,٣٩٩) ، التي تقرر تمتع عملية تركيب الدوال بالخاصة التجميعية وجدنا أن :

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) \\ &= f^{-1} \circ (I_Y \circ f) = f^{-1} \circ f = I_X\end{aligned}$$

ونجد بصورة مماثلة أن :

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (I_Y \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = I_Z\end{aligned}$$

وبهذا يتم إثبات النظرية .■

هنالك دوال تسمى متزايدة تماماً ، وأخرى تسمى متناقصة تماماً تتمتع بخاصة وجود دوال عكسية لها . لنبدأ أولاً بتعريف هذا النمط من الدوال .

١,٣٩٩٩١ — تعريف (الدالة المطردة)

لتكن $S \subseteq \mathbb{R}$ و $f : S \to \mathbb{R}$ دالة ما . نقول عن f إنها **متزايدة على** (أو في) S إذا كان $f(x_1) \leq f(x_2)$ عندما يكون x_1 , x_2 أي عنصرين من S يحققان المتراجحة $x_1 < x_2$. ونقول عن f إنها **متزايدة تماماً على** (أو في) S إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ عندما يكون x_1 , x_2 أي عنصرين من S يحققان المتراجحة $x_1 < x_2$. وتسمى f **متناقصة في** (أو على) S أو **متناقصة تماماً في** (أو على) S حسبما تكون الدالة $-f$ متزايدة ، أو متزايدة تماماً في S . وأخيراً فإن f تدعى دالة **مطردة في** (أو على) S ، إذا كانت متزايدة أو متناقصة في S .

وعلى سبيل المثال ، فإن الدالة الثابتة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متناقصة ومتزايدة في $\mathbb{R}$ دون أن تكون متزايدة تماماً ، أو متناقصة تماماً في $\mathbb{R}$. وبالعكس ، فكل دالة (غير خالية) متزايدة ومتناقصة لا بد وأن تكون ثابتة .

أما الدالة الحقيقية المحددة بالدستور $f(x) = x^2$ فهي متزايدة تماماً في $[0, +\infty[$ ، ولكنها ليست متزايدة ولا متناقصة ، ولا متزايدة تماماً ولا متناقصة تماماً في $\mathbb{R}$.

١,٣٩٩٩٢ — نظرية

لتكن f دالة حقيقية ساحتها S ومداها T . فإذا كانت f متزايدة تماماً في S ، فإنه يوجد لـ f دالة عكسية متزايدة تماماً في T . وإذا كانت f متناقصة تماماً في S ، فإنه يوجد لـ f دالة عكسية متناقصة تماماً في T .

البرهان

لتكن f متزايدة تماماً و x_1 , x_2 نقطتين من S بحيث $x_1 \neq x_2$. إذن إما أن يكون $x_1 < x_2$ أو $x_1 > x_2$. وعندها إما أن يكون $f(x_1) < f(x_2)$ أو $f(x_1) > f(x_2)$ ، وبالتالي $f(x_1) \neq f(x_2)$. لذا ، فإن الدالة $f : S \to T$ متباينة وغامرة . وبالتالي فإننا نستنتج من (١,٣٩٩٦) أنه يوجد للدالة f دالة عكسية $f^{-1} : T \to S$. ليكن y_1 , y_2 عنصرين من T بحيث $y_1 < y_2$ ، ولنفرض أن $y_2 = f(x_2)$ و $y_1 = f(x_1)$. عندئذ نجد استناداً إلى (١,٣٩٩٧) أن $x_2 = f^{-1}(y_2)$ و $x_1 = f^{-1}(y_1)$. وبالتالي يكون (لأن f متزايدة تماماً)

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

وهذا يعني أن f^{-1} متزايدة تماماً في T .

ويتم إثبات النظرية في حالة كون f متناقصة تماماً في S بصورة مماثلة .■

ثمة صنف خاص من الدوال ذو أهمية بالغة في التحليل الرياضي ، نورد تعريفها فيما يلي .

١,٣٩٩٩٣ — تعريف (المتوالية)

كل دالة $x: N \to X$، ساحتها مجموعة الأعداد الطبيعية N وتأخذ قيمها في مجموعة ما X، تدعى **متوالية في X** . (لاحظ أن x هنا ترمز الى دالة !) . وقد جرت العادة على الرمز لخيال العدد الطبيعي n وفق الدالة x، أي لـ $x(n)$، بالرمز x_n . أما المتوالية نفسها فسنشير لها بالرمز $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ، (أي بكتابة بضعة عناصر من مداها) ، أو بالرمز $\{x_n\}, n\in N$ ، أو اختصاراً بـ $\{x_n\}$. هذا ويجب التمييز بين الصيغة $\{x_n\}, n\in N$ ، التي تدل على المتوالية ، أي على الدالة

$$x = \{(1,x_1),(2,x_2),\ldots,(n,x_n),\ldots\}$$

وبين المجموعة $\{x_n : n\in N\}$ ، التي تدل على مدى المتوالية ، أي المجموعة

$$\mathcal{R}(x) = \{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$$

تدعى عناصر المدى $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ **حدود** أو عناصر المتوالية ، ويسمى الحد x_n الحد ذا الدليل n . أو الحد النوني . وإذا كانت حدود المتوالية أعداداً حقيقية قلنا إن المتوالية **حقيقية** .

نقول عن متوالية $\{x_n\}, n\in N$ إنها **منتهية** إذا كان مداها $\{x_n : n\in N\}$ منتهياً . أي إذا كان مؤلفاً من عناصر مختلفة عددها m ، حيث m عدد طبيعي ما . أما إذا لم يتحقق ذلك ، قلنا إنها **غير منتهية** . فمثلاً ، إن المتوالية $\{\frac{1}{n}\}, n\in N$ ، أي $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ، غير منتهية ، في حين أن المتوالية $\{(-1)^n\}, n\in N$، أي $-1, 1, -1, 1, \ldots$، منتهية .

١,٣٩٩٩٤ — تعريف (المتوالية الجزئية)

لتكن $x = \{x_n\}$ متوالية ما في X ولتكن k متوالية في N ، أي أن k دالة ساحتها N ومداها مجموعة جزئية من N . سنفترض أن الدالة k متزايدة تماماً في N (١,٣٩٩٩١) . إن مركبة الدالتين $x\circ k$ هي دالة ساحتها N ومداها مجموعة جزئية من X . وبالتالي ، فإن $x\circ k$ متوالية في X . تسمى هذه المتوالية **متوالية جزئية** من المتوالية $\{x_n\}$.
ولما كانت x,k متواليتين ، فإننا سنرمز لحديهما النونيين $x(n)$, $k(n)$ كما سبق واصطلحنا، بـ k_n و x_n على الترتيب . ولهذا ، فإن الحد النوني لمتواليتنا الجزئية $x\circ k$ هو

$$(x\circ k)(n) = x(k(n)) = x_{k(n)} = x_{k_n}$$

وبالتالي ، فمن الممكن الرمز لمتواليتنا الجزئية بـ $\{x_{k_n}\}, n\in N$، أو إختصاراً $\{x_{k_n}\}$.

فمثلاً ، إذا كانت x هي المتوالية $\{\frac{1}{n}\}, n\in N$ ، و k هي المتوالية $\{2^n\}, n\in N$ ، فإن المتوالية الجزئية $\{x_{k_n}\}, n\in N$ من المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ هي $\{\frac{1}{2^n}\}, n\in N$ أي المتوالية $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ لأن

$$x_{k_n} = x(k(n)) = x(2^n) = \frac{1}{2^n}$$

تمارين

المجموعات

(١ — ١)

لتكن A,B,C مجموعات ثلاث من مجموعة كلية X . أثبت صحة ما يلي :

(أ) $A-(A-B) = A\cap B$

(ب) الشرط اللازم والكافي كي يكون $A-B = A$ هو أن يكون $A\cap B = \varnothing$

(جـ) $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$.

(د) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$.

(هـ) $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$.

(و) تحقق من صحة النتيجة الثالثة من (١,١٩) ، التي تنص على أن

$$A-B = A\cap(X-B)$$

ثم بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $A\subseteq B$ ، هو أن يتحقق واحد من الشروط الثلاثة التالية :

$$(X-A)\cup B = X \qquad A\cap(X-B) = \varnothing \qquad X-B\subseteq X-A$$

(١ — ٢)

نعرف **الفرق التناظري** $A\Delta B$ لمجموعتين A,B في مجموعة كلية X على النحو التالي :

$$A\Delta B = (A\cup B)-(A\cap B)$$

أثبت ما يلي :

(أ) $A\Delta B = B\Delta A$ (أي أن العملية Δ تبديلية) .

(ب) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (أي أن Δ تجميعية) .

(ارشاد للحل : أثبت أولاً أن $A\Delta B = [A\cap(X-B)]\cup[B\cap(X-A)]$

وذلك استنادا إلى $A-B = A\cap(X-B)$ وإلى دستور دي مورغان . استنتج بعد ذلك أن

$$(A\Delta B)\Delta C = [A\cap(X-B)\cap(X-C)]\cup[(X-A)\cap B\cap(X-C)]\cup(A\cap B\cap C)\cup$$
$$\cup[(X-A)\cap(X-B)\cap C]$$

بادل في هذه المساواة بين C,A ، فتجد أن $(C\Delta B)\Delta A = (A\Delta B)\Delta C$

طبق بعد ذلك الخاصة التبديلية مرتين في الطرف الأيسر فتجد

$$((C\Delta B)\Delta A = A\Delta(C\Delta B) = A\Delta(B\Delta C)$$

(جـ) أيا كانت A ، فإن $A\Delta\varnothing = A$ ، (أي أن $\varnothing$ عنصر محايد لـ Δ)

(د) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$ ، (أي أن عملية التقاطع $\cap$ توزيعية بالنسبة لـ Δ).

(هـ) بين أنه يوجد دوماً للمعادلة $A\Delta Y = B$ حل.

(١ — ٣)

هل يوجد للمعادلة $A \cup Y = B$ حل دوما ، وذلك بفرض A,B مجموعتين مفروضتين ؟ أعد السؤال من أجل المعادلة $A \cap Y = B$

(١ — ٤)

لتكن لدينا الجماعة $\{A_n\}, n \in N$ من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ (Nمجموعة الأعداد الطبيعية و $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية) حيث

$$A_n = \{ y : |y-1| < n, |y+1| > \frac{1}{n} \}$$

أوجد $\cap_N A_n, \cup_N A_n$.

(١ — ٥)

لتكن لدينا الجماعة $\{A_n\}, n \in N$ من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ حيث

$$A_n = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{n} \}$$

بين صحة ما يلي :

(أ) $A_3 \cup A_7 = A_3$

(ب) $A_3 \cap A_{20} = A_{20}$

(جـ) $A_s \cap A_t = A_M$ حيث M أكبر العددين s,t

(د) $A_s \cup A_t = A_m$ حيث m أصغر العددين s,t .

(هـ) إذا كانت B مجموعة جزئية من N فإن $\bigcup_{i \in B} A_i = A_b$ حيث b هو أصغر عدد طبيعي في B .

(و) $\cap_N A_n = \varnothing$.

(١ — ٦)

إذا كان $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ فاثبت أن $(X \times Y) - (A \times B) = [(X-A) \times Y] \cup [X \times (Y-B)]$

(١ — ٧)

إذا كان $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ و $C \subseteq X$ و $D \subseteq Y$ فالمطلوب إثبات :

(أ) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

(ب) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

أورد مثالا تبين فيه عدم تساوي طرفي العلاقة (ب) .

العلاقات

(١ — ٨)

لتكن $B = \{3,6,7,10\}$ $A = \{1,2,3,4,5\}$

ولتكن Γ علاقة من A إلى B ، (أي في $A \times B$) خاصتها المحددة "x من A يقسم y من B".

(أ) عين العلاقة Γ جدولياً ، أي اكتب مجموعة الأزواج المرتبة ، التي تنتمي إلى Γ .

(ب) حدد ساحة ومدى العلاقة Γ .

(١ — ٩)

تعرف العلاقة العكسية لعلاقة Γ على أنها العلاقة

$$\Gamma^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in \Gamma\}$$

(أ) عين العلاقة العكسية للعلاقة $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\}$

(ب) عين ساحة ومدى كل من Γ و Γ^{-1} .

(١ — ١٠)

لتكن Γ علاقة بين الأعداد الطبيعية N خاصتها المحددة $2x + y = 10$

(أ) عين مجموعة الأزواج المرتبة ، التي تنتمي الى Γ ، ثم عين ساحة ومدى Γ .

(ب) تحقق من أن العلاقة العكسية Γ^{-1} (التي عرفناها في التمرين ١ — ٩) هي

$$\Gamma^{-1} = \{(8,1),(6,2),(4,3),(2,4)\}$$

(١ — ١١)

برهن أنه اذا كانت Γ علاقة تكافؤ على A فإن $\Gamma = \Gamma^{-1}$. بين أن $A \times A - \Gamma$ ليست علاقة تكافؤ .

(١ — ١٢)

لتكن Γ و Γ' علاقتين على مجموعة A . أثبت صحة الدعويين التاليتين :

(أ) إذا كانت كل من Γ, Γ' متناظرة فإن $\Gamma \cup \Gamma'$ علاقة متناظرة .

(ب) إذا كانت Γ منعكسة و Γ' أيّ علاقة ، فإن $\Gamma \cup \Gamma'$ منعكسة .

(١ — ١٣)

لقد أورد أحد الطلبة « برهانا » على أنه إذا كانت Γ علاقة متناظرة ومتعدية فإنها منعكسة على النحو التالي : « بما أن Γ متناظرة ، فإن $(a,b) \in \Gamma$ تقتضي أن يكون $(b,a) \in \Gamma$. ولما كانت Γ متعدية ، فإنه ينتج عن $(a,b) \in \Gamma$ و $(b,a) \in \Gamma$ معاً أن $(a,a) \in \Gamma$ ، وبالتالي فإن Γ منعكسة ».ما هو النقد الذي يمكن أن توجهه لهذا البرهان ؟

(١ — ١٤)

لتكن Γ علاقة على مجموعة A ، ولتكن $B \subseteq A$. نعرف مقصور Γ على B على أنه العلاقة $\Gamma \cap (B \times B)$. بين أن مقصور علاقة تكافؤ، هو علاقة تكافؤ على B .

(١ — ١٥)

لتكن Γ علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N (أي علاقة في N^2) ، مؤلفة من جميع الأزواج المرتبة (x,y) ، بحيث يكون $x+y$ عدداً فردياً .

(أ) بين أن Γ ، ليست دالة .

(ب) تحقق من أن Γ ليست علاقة تكافؤ.

(جـ) أثبت أن Γ ليست علاقة ترتيب جزئي على N .

(١ — ١٦)

لتكن Γ علاقة على A تحقق الشرطين التاليين :

(أ) أياً كان y من مدى Γ فإن $(y,y) \in \Gamma$

(ب) إذا كان $(z,y) \in \Gamma$ و $(x,y) \in \Gamma$ فإن $(z,x) \in \Gamma$

أثبت أن Γ علاقة متناظرة .

(١ — ١٧)

أثبت أنه يمكن إجراء 15 تجزئة مختلفة للمجموعة $A = \{1,2,3,4\}$

(١ — ١٨)

لتكن Γ علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N خاصتها المحددة $x|y$ ، أي x يقسم y . بين أن Γ علاقة ترتيب جزئي دون أن تكون علاقة ترتيب كلي .

(١ — ١٩)

لتكن $\{A_n\}, n \in N$ جماعةً من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^2$ ، حيث

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : n-1 < x^2+y^2 < n\}$$

(أ) بين أنه إذا كان $n \neq m$ فإن $A_n \cap A_m = \emptyset$.

(ب) أوجد $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

(جـ) تحقق من أن $\{A_n\}, n \in N$ ، تشكل تجزئة للمستوى $\mathbb{R}^2$. ما هي علاقة التكافؤ الناتجة عن هذه التجزئة ؟

الـدوال

(١ — ٢٠)

في كلٍّ من العلاقات التالية على $\mathbb{R}$، حدد ساحة ومدى كل منها ، وقرر ما إذا كانت كل منها دالة أم لا . وفي حالة كون العلاقة دالة ، بين ما إذا كان لهذه الدالة دالة عكسية .

(أ) $\Gamma = \{ (x,y) : y = \frac{x + x}{2} \}$

(ب) $\Gamma = \{ (x,y) : y = |x^2 - 1| \}$

(جـ) Γ هي مجموعة الأزواج المرتبة (x,y) حيث $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ عندما $\frac{1}{2} < x < 1$ و $y = \frac{3x}{2}$ عندما $0 < x < \frac{1}{2}$.

(د) $\Gamma = \{ (x,y) : y = \frac{x}{x+2} \}$

(هـ) $\Gamma = \{ (x,f(x)) : f(x) = \frac{x-2}{x+3} \}$

(و) $\Gamma = \{ (x,y) : |x| < y \}$

(١ — ٢١)

لتكن $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ و $A \subseteq X$. تُعرَّف **الدالة المميِّزة** لـ A على أنها دالة χ_A محددة بالدستور :

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & (\text{عندما } x \in A) \\ 0 & (\text{عندما } x \notin A) \end{cases}$$

(أ) بين أن χ_A هي حقاً دالة وان مداها محتوى في $\{0,1\}$.

(ب) وبالعكس ، بين أن اي دالة على X مداها محتوى في $\{0,1\}$ ، تعين مجموعة جزئية وحيدة من X .

(جـ) أفِدْ مما سبق لتعيين عدد المجموعات الجزئية الموجودة في X .

(١ — ٢٢)

لتكن $f : X \to Y$ دالة ما.

(أ) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون f دالة غامرة ، هو أن يكون $f(f^{-1}(B))\,B$ أيا كانت المجموعة الجزئية B من Y .

(ب) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون f دالة متباينة هو أن يكون $f^{-1}(f(A)) = A$ ، أيا كانت المجموعة الجزئية A من X .

(١ — ٢٣)

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f : X \to Y$ متباينة وغامرة ، هو أن يكون $f(X - A) = Y - f(A)$ أيا كانت المجموعة الجزئية A من X .

(١ — ٢٤)

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f: X \to Y$ متباينة ، هو أن يكون $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ، ايا كانت المجموعتان الجزئيتان A, B من X .

(١ — ٢٥)

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f: X \to Y$ ، التي ساحتها $X \neq \varnothing$ متباينة ، هو أن توجد دالة $g: Y \to X$ ، بحيث يكون $g \circ f = I_X$.

(١ — ٢٦)

لتكن $f: X \to Y$ ، $g: Y \to Z$ دالتين .

(أ) برهن أنه ، إذا كانت الدالة $g \circ f$ غامرة ، فإن g غامرة كذلك .

(ب) برهن أنه ، إذا كانت الدالة $g \circ f$ متباينة ، فإن f متباينة كذلك .

(١ — ٢٧)

لتكن $f: X \to Y$ دالة ما و A مجموعة جزئية من X . برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون g مقصور الدالة f على A ، هو أن يكون $g = f \cap (A \times Y)$.

(١ — ٢٨)

لتكن $\{x_n\}, n \in N$ متوالية ما ، ولتكن $\{x_{k_n}\}, n \in N$ متوالية جزئية من $\{x_n\}, n \in N$. بيّن أنه أيا كان العدد الصحيح الموجب n ، فإن $k_n \geq n$.





الفصل الثاني

الأعداد الحقيقية

Real Numbers

تعرفنا في الفصل الأول على المفاهيم الأولية لنظرية المجموعات ، والتي يمكن أن توفر لنا الأسس المنطقية لدراستنا لموضوع التحليل الرياضي . أما الأسس المادية ، التي لا يمكن لصرح التحليل الرياضي أن يقوم بمنأى عنها ، **فهي** الأعداد الحقيقية . وعلى الرغم من ورود هذه الأعداد في بعض الأمثلة والتمارين في الفصل السابق ، إلا أن تمثلنا لهذه الأعداد وخواصها ارتكز على أسس حدسية اكتسبناها من خلال دراستنا للرياضيات الابتدائية في المراحل السابقة .

وجماع الرأي في أيامنا هذه ، أن كثيراً من النظريات الأساسية في التحليل الرياضي ، لا يمكن برهانها دون افتراض خواص للأعداد الحقيقية بعيده كل البعد عن كونها خواص حدسية . وما سنفعله في هذا الفصل هو التسليم بوجود مجموعة $\mathbb{R}$ ، (نسمي عناصرها أعدادا حقيقية) مزودة بخواص معينة (تسمى عادة مسلمات أو مصادرات **Axioms**)،ومن ثم نبدأ باستخلاص النتائج المترتبة على تمتع $\mathbb{R}$ بهذه المسلمات . وبعبارة أخرى ، فسنسلك في دراسة المجموعة $\mathbb{R}$ النهج الاستقرائي أو طريقة المسلمات **Inductive or axiomatic method**،مبتعدين بذلك عن الاعتماد على الحدسيات . وسنختار مجموعة المسلمات ، بحيث تصبح كثير من النتائج التي نتوقعها حدسيا حول الأعداد الحقيقية .

وسنمهد لدراسة الأعداد الحقيقية بلمحة سريعة عن بعض البنى الجبرية الأساسية .

٢,١ — مقدمة جبرية

Algebraic Introduction

٢,١١ تعريف (العملية)

نعرف **العملية الداخلية الثنائية** ، أو اختصارا **العملية الداخلية** على مجموعة S ، بأنها دالة ساحتها $S\times S$ ومداها في S .

فإذا رمزنا بـ $\circ$ للعملية الداخلية على S ، فإن خيال العنصر (x,y) من $S\times S$ وفق $\circ$ هو $\circ(x,y)$. وقد جرت العادة على استعمال الرمز $x\circ y$ بدلاً من $\circ(x,y)$. يسمى العنصر $x\circ y$ **ناتج** $\circ$ على x,y . هذا ، وإذا رمزنا للعملية الداخلية بـ $+$ ،فإننا نسمي العملية الداخلية عندئذ ، عملية الجمع ، كما أن الناتج $x+y$ يسمى **مجموع** الحدين x,y . وإذا رمزنا للعملية الداخلية بـ $\cdot$ فإننا نسميها **عملية الضرب** كما نسمي الناتج $x.y$ (الذي يرمز له ايضاً بـ xy) **حاصل ضرب أو جداء** x,y.

وعلى سبيل المثال ، فإذا كانت A مجموعة ما مجموعة أجزائها 2^A ، فإن العملية $\circ$ المعرفة على $2^A \times 2^A$ بالدستور

$$A\circ B = A\cup B$$

هي عملية داخلية على 2^A . أما عملية الضرب العددي المعرفة على مجموعة المتجهات ، فليست عملية داخلية لأن حاصل ضرب متجهين هو عدد وليس متجها .

نقول عن عملية $\circ$ على مجموعة S إنها **تجميعية** (أو قابلة للدمج) ، إذا كان $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$ أيا كان x,y,z من S . فقد وجدنا مثلا في (١,٣٩٩) ، أن عملية تركيب الدوال $f: X\to X$ عملية تجميعية . أما عملية الضرب المتجه المعرفة على مجموعة المتجهات الطليقة ، فليست تجميعية .

نقول عن عملية $\circ$ على مجموعة S إنها **تبديلية** (أو آبلية) إذا كان $x\circ y = y\circ x$ أيا كان $x,y\in S$. فقد وجدنا مثلاً (١,٣٩٨) أن عملية تركيب الدوال ليست تبديلية ، كما أن عملية الضرب المتجه المعرفة على مجموعة المتجهات الطليقة ، ليست تبديلية أيضاً . أما عمليتا اجتماع وتقاطع المجموعات فتبديليتان . لتكن S مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين $*$ و $\circ$. نقول عن العملية $\circ$ إنها **توزيعية من اليسار** بالنسبة للعملية $*$ إذا توافر الشرط

$$x\circ(y*z) = (x\circ y)*(x\circ z)$$

أيا كان x,y,z من S . ونقول عن $\circ$ إنها **توزيعية من اليمين** بالنسبة لـ $*$ إذا كان

$$(y*z)\circ x = (y\circ x)*(z\circ x)$$

أيا كان x,y,z من S .

أما إذا كانت $\circ$ توزيعية من اليسار ومن اليمين بالنسبة للعملية $*$ ، قلنا اختصارا إن $\circ$ **توزيعية** بالنسبة لـ $*$. فقد وجدنا مثلاً أن كلاًّ من عمليتي اجتماع وتقاطع المجموعات توزيعية بالنسبة للأخرى . أما عملية الاجتماع فيمكن التحقق بسهولة من أنها غير توزيعية بالنسبة لعملية طرح مجموعة من أخرى .

لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية $\circ$. فإذا وجد عنصر e في S ، بحيث يكون $e\circ x = x\circ e = x$ ، أيا كان x من S ، فإننا نسمي e **عنصراً محايداً بالنسبة لـ** $\circ$.

وإذا كان x عنصراً من S،ووجد عنصر x' من S بحيث $x\circ x' = x'\circ x = e$ ، فإننا نسمي x' نظير x بالنسبة للعملية$\circ$

هذا ، وإذا أسمينا العملية الداخلية عملية جمع (وعندها نرمز للعملية بـ $+$)،فإننا نرمز للعنصر المحايد (بالنسبة لعملية الجمع $+$) بـ 0 (ونسميه **صفراً**)،ونرمز عندئذ لنظير x (بالنسبة لعملية الجمع) بـ $-x$.

أما إذا أسمينا العملية الداخلية عملية ضرب (وعندها نرمز للعملية بـ •)، فإننا نرمز للعنصر المحايد (بالنسبة لعملية الضرب •) بـ 1 ونسميه **واحداً** ، ونرمز عندئذ لنظير x (بالنسبة لعملية الضرب) بـ x^{-1} أو $\frac{1}{x}$.
فمثلاً ، تشكل المجموعة الخالية ∅ عنصراً محايداً بالنسبة لعملية اجتماع المجموعات،كما ان نظير ∅ بالنسبة للعملية U هو ∅ . هذا ، ولا يوجد لأي مجموعة غير خالية نظير بالنسبة لعملية الاجتماع U .
لتكن S مجموعة مزودة بعملية داخلية أو أكثر بحيث تحقق هذه العمليات مسلمات معينة . عندئذ تسمى S **بنية جبرية** .
وسنقتصر فيما يلي على تعريف ثلاث بنى جبرية رئيسية هي الزمرة والحلقة والحقل .

٢,١٢ — تعريف (الزمرة)

لتكن G مجموعة و ∘ عملية داخلية على G . نقول عن الثنائية (G,∘) إنها **زمرة** إذاكانت العملية ∘ تجميعية ، ووجد لـ ∘ عنصر محايد e ، ووجد لكل عنصر x من G نظير 'x بالنسبة لـ ∘ . وإذاكانت العملية ∘ فضلاً عن ذلك **تبديلية** أيضاً،قلنا إن الزمرة تبديلية أو **آبلية** .

وإذاكانت (G,∘) زمرة قلنا إن G زمرة بالنسبة لـ ∘ ، أو إختصارا،إن G زمرة،إذا لم يكن ثمة مجال للإلتباس .

فمثلاً ، تشكل مجموعة الدوال المتباينة والغامرة لمجموعة X على X نفسها زمرة بالنسبة لعملية تركيب الدوال (راجع (١,٣٩٨) و (١,٣٩٩) . لكن هذه الزمرة ليست تبديلية .

٢,١٣ — تعريف (الحلقة)

الحلقة هي ثلاثية (E,∘,*) ، حيث E مجموعة و*,∘ عمليتان داخليتان بحيث تكون (E,∘) زمرة تبديلية ، وبحيث تكون العملية الثانية * تجميعية وتوزيعية بالنسبة للعملية الأولى .

وإذاكانت (E,∘,*) حلقة قلنا «إن E حلقة بالنسبة لـ ∘ و * » ، أو اختصاراً ، إن E حلقة ، إذا لم يكن ثمة مجال للالتباس .

نلاحظ أننا لم نشترط في العملية * أن تكون تبديلية ، كما لم نشترط وجود عنصر محايد بالنسبة لهذه العملية . فإذا كانت العملية * تبديلية أسمينا الحلقة **تبديلية** ، وإذا وجد عنصر محايد بالنسبة لهذه العملية * أسمينا الحلقة **واحدية** .

٢.١٤ — تعريف (الحقل)

لتكن F مجموعة ، ولتزود F بعمليتين داخليتين سنرمز لهما بـ + و • ، ونسميهما عمليتي جمع وضرب على الترتيب . نقول عن الثلاثية (.,+,F) ، إنها **حقل** (بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب) إذاكانت هذه الثلاثية حلقة تبديلية، وكانت المجموعة $F^* = F-\{0\}$ (حيث 0 هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع) زمرة بالنسبة لعملية الضرب .

هذا ، وإذاكان (.,+,F) حقلاً قلنا «إن F حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب» او اختصاراً ،«إن F حقل» .

٢,١٥ — نتيجة

يترتب على هذا التعريف ، وعلى تعريف الزمرة،أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $(F, +, .)$ حقلا هو أن تتحقق الشروط الثلاثة التالية :

(أ) أن تكون $(F, +)$ زمرة تبديلية .

(ب) أن تكون $(F-\{0\}, .)$ زمرة تبديلية .

(جـ) أن تكون عملية الضرب توزيعية بالنسبة لعملية الجمع .

٢,١٦ — تعريف (الحقل المرتب)

نقول عن الرباعية $(F, +, ., \leqslant)$. إنها **حقل مرتب** إذا تحققت الشروط التالية :

(أ) أن يكون $(F, +, .)$ حقلاً .

(ب) أن تكون $\leqslant$ علاقة ترتيب كلي على F .

(جـ) إذا كان $x \leqslant y$ فإن $x+z \leqslant y+z$ أيا كان z من F .

(د) إذا كان $x \leqslant y$ فإن $xz \leqslant yz$ ايا كان z الذي يحقق الشرط $0 < z$.

٢.١٧ — تعاريف

نقول عن عنصر ما u من حقل مرتب F إنه **عنصر حاد من الأعلى** لمجموعة جزئية A من F ، إذا كان $u \geqslant x$ أيا كان x من A . وإذا وجد مثل هذا العنصر ، قلنا إن A **محدودة من الأعلى** . أما إذا لم يوجد ، قلنا إن A **غير محدودة من الأعلى** . كذلك ، يقال عن u إنه **عنصر حاد من الأدنى** لـ A،إذا كان $u \leqslant x$ أيا كان x من A . واذا وجد مثل هذا العنصر قلنا إن A **محدودة من الأدنى** . أما إذا لم يوجد قلنا إن A **غير محدودة من الأدنى** . واذا كانت F محدودة من الأعلى ومن الأدنى،قلنا اختصارا إنها **محدودة** . نقول عن عنصر $\bar{u}$ من حقل مرتب F إنه **حد أعلى** لمجموعة جزئية A من F،ونكتب $\bar{u} = \sup A$ أو $\bar{u} = \text{l.u.b.}\ A$ ، إذا تحقق الشرطان التاليان :

(١) أن يكون $\bar{u}$ عنصراً حادا من الأعلى لـ A .

(٢) إذا كان u عنصراً حادا من الاعلى لـ A ، فإن $\bar{u} \leqslant u$

ونترك للقارىء تعريف **الحد الأدنى** للمجموعة A الذي نرمز له بـ $\inf A$ أو $\text{g.l.b.}\ A$.

٢,٢ - المسلمات الجبرية للأعداد الحقيقية

Algebraic Axioms of Real Numbers

٢,٢١ - تعريف

الأعداد الحقيقية هي مجموعة $\mathbb{R}$ مزودة بعمليتين داخليتين $+$ و$\cdot$ نسميهما عمليتي جمع وضرب، وبعلاقة ترتيب كلي نرمز لها بـ $\leqslant$ ، بحيث تكون الرباعية $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ **حقلاً مرتباً تاما** .

سنبتدىء بسرد خواص $\mathbb{R}$ الناتجة عن القسم الأول من تعريف $\mathbb{R}$ ، أي من كون $\mathbb{R}$ حقلاً مرتبا . وبعبارة أخرى ، سنبتدىء بدراسة البنية الجبرية لـ $\mathbb{R}$. وسنرجىء تعريف «تمام» الحقل $\mathbb{R}$ والنتائج المترتبة عليه إلى حين الانتهاء من دراسة هذه الخواص الجبرية .

وهكذا ، فإن $\mathbb{R}$ حقل مرتب بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب . إن هذا يعني استنادا إلى (٢.١٦) و(٢.١٥) و(١,٢٩٣) أنه يجب أن تتحقق المسلمات التالية :

I. أن تكون $\mathbb{R}$ زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع (٢,١٢)، أي أن يتم ما يلي :

(١) أيا كان x,y من $\mathbb{R}$ ، فإن $x+y=y+x$.
(٢) أيا كان x,y,z من $\mathbb{R}$ ، فإن $(x+y)+z=x+(y+z)$.
(٣) هنالك عنصر 0 من $\mathbb{R}$ ، بحيث $x+0=0+x=x$ أيا كان x من $\mathbb{R}$.
(٤) يقابل كل عنصر x من $\mathbb{R}$ عنصر $-x$ من $\mathbb{R}$ ، بحيث يكون $x+(-x)=(-x)+x=0$.

II. أن تكون $\mathbb{R}-\{0\}$ زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الضرب ، أي أن يتم التالي :

(٥) أيا كان x,y من $\mathbb{R}$ (*) فإن $xy=yx$.
(٦) أيا كان x,y,z من $\mathbb{R}$ ، فإن $(xy)z=x(yz)$.
(٧) هنالك عنصر 1 من $\mathbb{R}$ ، ($1\neq 0$)، بحيث يكون $x1=1x=x$ أيا كان x من $\mathbb{R}$.
(٨) يقابل كل عنصر غير صفري x من $\mathbb{R}$ عنصر x^{-1} (يرمز له أحياناً بـ $\frac{1}{x}$ ويسمى مقلوب x) ، بحيث يكون $xx^{-1}=x^{-1}x=1$.

III. أن تكون عملية الضرب توزيعية بالنسبة لعملية الجمع ، وهذا يعني ما يلي :

(٩) أيا كان x,y,z من $\mathbb{R}$ ، فإن $x(y+z)=xy+xz$.

(*) كان من الواجب افتراض x,y,z في الخواص (٥) — (٧) ، عناصر غير صفرية لأننا في نطاق المجموعة $\mathbb{R}-\{0\}$ الا ان شمول هذه الخواص للمجموعة $\mathbb{R}$ بأكملها أمر مشروع لأنه يمكن التحقق بأن $x0=0x=0$ ، أيا كان x من $\mathbb{R}$ (٢,٢٢) .

IV أن تكون $\leqslant$ علاقة ترتيب كلي على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي (١,٢٩٣) :

(١٠) أيا كان من العنصران x,y من $\mathbb{R}$، فلا بد أن تتحقق واحدة فقط مما يلي : $x=y$ أو $y<x$ أو $x<y$ أو $x>y$.

(١١) إذا كان $x<y$ و $y<z$، فإن $x<z$.

كما ينبغي على علاقة الترتيب الكلي $\leqslant$ أن تحقق المسلمتين التاليتين :

(١٢) إذا كان $x\leqslant y$ ، فإن $x+z\leqslant y+z$ أيا كان z من $\mathbb{R}$.

(١٣) إذا كان $x\leqslant y$ ، فإن $xz\leqslant yz$ أيا كان z الذي يحقق الشرط $z>0$.

نسمي كلا من $\leqslant$ و $<$ **متراجحة** . وعندما يكون $x\leqslant y$ ، فإننا نقول «إن x أصغر أو يساوي y » أو «إن y أكبر أو يساوي x » . وعندما يكون $x<y$ ، فإننا نقول «إن x أصغر من y » أو «إن y أكبر من x ». وما نريد قوله الآن هو أن جميع الخواص الجبرية وخواص الترتيب ، التي تعرفنا عليها عند دراستنا للحساب والجبر الأبتدائي والتي قبلناها بصورة حدسية،تنتج عن هذا العدد الضئيل من المسلمات . وسنستنتج فعلا بعضا من هذه الخواص ، بغرض إطلاع القارىء على الكيفية التي تستغل بها هذه المسلمات للتوصل إلى الخواص الجبرية المألوفة للأعداد .

٢.٢٢ ـ نظريات

(١) أيا كان العدد الحقيقي x ، فإن $x=-(-x)$. كما أنه أيا كان العدد الحقيقي غير الصفري x فإن $x = (x^{-1})^{-1}$.

البرهان

تبين المسلمة (٤) أنه ايا كان x من $\mathbb{R}$ ، فإن نظير x -بالنسبة للجمع هو x . ولما كان نظير أي عدد حقيقي y بالنسبة للجمع هو $-y$ ، كما سبق واصطلحنا ، فإن $x=-(-x)$.
ونجد بصورة مماثلة ، أنه إذا كان $x\neq 0$ ، فإن $x = (x^{-1})^{-1}$. ■

(٢) إذا رمزنا بـ $x-y$ للمجموع $x+(-y)$ ، وأسميناه **حاصل طرح** y من x ، فإن $-(x-y)=y-x$.

البرهان

$$(y-x)+(x-y) = [y+(-x)]+[x+(-y)] \quad \text{(تعريفاً)}$$
$$= y+([(-x)+[x+(-y)]]) \quad \text{((المسلمة (٢))}$$
$$= y+([(-x)+x]+(-y)) \quad \text{((المسلمة (٢))}$$
$$= y+(0+(-y)) \quad \text{((المسلمة (٤))}$$
$$= y+(-y) \quad \text{((المسلمة (٣))}$$
$$= 0 \quad \text{((المسلمة (٤))}$$

إذن ، فإن $y-x$ هو نظير $x-y$ بالنسبة للجمع،أي أن $-(x-y)=y-x$. ■

(٣) أيا كان x,y,z من $\mathbb{R}$ فإن $x(y-z)=xy-xz$

البرهان

$$x(y-z)+xz=x((y-z)+z)=x((y+(-z))+z) \quad \text{((المسلمة (٩)}$$

$$=x(y+(-z+z))=x(y+0)=xy \quad \text{((المسلمات (٢) و(٣) و(٤)}$$

وبإضافة العنصر $-xz$ إلى طرفي المساواة الناتجة ، نجد المطلوب . ■

يترتب على الدستور $x(y-z)=xy-xz$ النتائج التالية ، أيا كان x,z من $\mathbb{R}$:

(i) إذا وضعنا $y=z$ ، نجد $x\cdot 0=0$.

(ii) إذا وضعنا $z=1$ و $y=0$ نجد $x(-1)=-x$ وهذا يعني أن نظير أي عدد حقيقي بالنسبة للجمع يساوي حاصل ضرب هذا العدد بنظير العدد 1 بالنسبة للجمع .

(iii) إذا وضعنا $y=0$ ، نجد $x(-z)=-xz$

(iv) إذا وضعنا $-x$ موضع x و $y=0$ ، نجد

$$(-x)(-z)=-(-x)z=-1[(-x)z]$$

$$=-1[-(xz)]=-(-xz)=xz$$

(٤) إذا كان x,y عددين حقيقيين ، بحيث $x\leq y$ و $y\leq x$ ، فإن $x=y$. إن هذا ناتج عن كون $\leq$ تعني $<$ أو $=$ وعن المسلمة (١٠) . ■

(٥) إذا كان $y\leq z$ و $x<y$ فإن $x<z$ ، وإذا كان $y<z$ و $x\leq y$ ، فإن $x\leq z$.

البرهان

إذا كان $y<z$, $x<y$ فإن $x<z$ وفق المسلمة (١١) . أما إذا كان $x<y, y=z$ ، فإن هذا يعني مباشرة أن $x<z$. ويتم إثبات ما تبقى من النظرية بصورة مماثلة . ■

(٦) الشرط اللازم الكافي كي يكون $x<y$ هو أن يكون $x+z<y+z$ أيا كان z من $\mathbb{R}$.

البرهان

إذا كان $x<y$ فإن $x+z<y+z$ ، استناداً الى المسلمة (١٢) . وبالعكس لنفترض أن $x+z<y+z$ ، حيث z عنصر ما من $\mathbb{R}$. عندئذ يتتج عن المسلمة (١٢) نفسها أن $(x+z)+(-z)<(y+z)+(-z)$ ، وإذا طبقنا المسلمات (٢) و(٣) و(٤) نجد $x<y$. ■

ونترك للقارىء التحقق من أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x<y$ هو $x+z<y+z$ أيا كان z من $\mathbb{R}$.

نقول عن عدد حقيقي x إنه **موجب** إذا كان $x>0$ (أي $0<x$)،**وسالب** إذا كان $x<0$. ونقول عن عددين حقيقيين إنهما من **إشارة واحدة** إذا كانا موجبين معاً،أو كانا سالبين معا . أما إذا كان أحدهما موجبا والآخر سالبا ، فإننا نقول إنهما من **إشارتين مختلفتين** .

(٧) الشرط اللازم والكافي كي يكون x موجبا ، هو أن يكون $-x$ سالباً . والشرط اللازم والكافي كي يكون x سالباً ، هو أن يكون $-x$ موجباً .

البرهان

تبين النظرية (٦) أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x>0$ ، هو أن يكون $x+(-x)>0+(-x)$ أي $0>-x$. ونجد بصورة مماثلة ما تبقى من النظرية . ■

(٨) إن مجموع عددين حقيقيين موجبين عدد موجب ، ومجموع عددين حقيقيين سالبين عدد سالب .

البرهان

إذا كان $0<x$ ، $0<y$ ،فإنه يترتب على $0<x$ والمسلمة (١٢) أن $0+y<x+y$ أو $y<x+y$. لكن $0<y$ ، إذن نجد وفق المسلمة (١١) أن $0<x+y$. ونجد بصورة مماثلة أن مجموع عددين سالبين عدد سالب . ■

(٩) إن حاصل ضرب عددين من إشارة واحدة عدد موجب . وحاصل ضرب عددين من إشارتين مختلفتين عدد سالب .

البرهان

لنفترض $0<x$ ، $0<y$. إذن ينتج مباشرة عن المسلمة (١٣) أن $0y<xy$. لكن رأينا أن $0y=0$ ، إذن $0<xy$ ، أي أن xy موجب . أما إذا كان $x<0, y<0$ فإن النظرية (٧) تدل على أن $-y>0$ و $-x>0$ ، وبالتالي نجد مما سبق أن $0<(-x)(-y)$.لكن وجدنا أن $(-x)(-y)=xy$ ، إذن $0<xy$.

ونجد بصورة مماثلة أن حاصل ضرب عددين من إشارتين مختلفتين عدد سالب . ■

(١٠) نستنتج من (٩) أن $0<1$ ، ذلك أن $1=1.1$. نستنتج كذلك أنه إذا كان x أي عدد غير صفري فإن x, x^{-1} من إشارة واحدة ، ذلك أنه لو كانا من إشارتين مختلفتين لكان xx^{-1} ، أي 1 ، سالبا . ■

سنبين الآن أن عكس (٩) صحيح .

(١١) إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين عدداً موجباً فإن العددين من إشارة واحدة ، وإذا كان حاصل ضربهما سالبا كانا من إشارتين مختلفتين .

البرهان

لنفترض $xy > 0$. فإذا كان $0 < x$ فإن $0 < x^{-1}$ كما رأينا . وبالتالي ، فإننا نجد وفق المسلمة (١٣) أن $x^{-1}(xy) > 0$. ويمكن التحقق بسهولة من أن هذا ليس الا $y > 0$. أما إذا كان $x < 0$ ، فإن $x^{-1} < 0$ كما رأينا . إذن نجد استناداً الى (٩) أن $x^{-1}(xy) < 0$ ، أي $y < 0$.

ونجد بصورة مماثلة أنه إذا كان $xy < 0$ فإن x,y من إشارتين مختلفتين . ■

سنورد الآن واحداً من أهم التعاريف التي تشكل أداة فعالة في كثير من بحوث علم التحليل الرياضي .

٢,٢٣ — تعريف

نعرّف **القيمة المطلقة** لعدد حقيقي x على أنه عدد حقيقي ،نرمز له بـ $|x|$ ، محدد بالدساتير التالية :

$$|x| = \begin{cases} x & (\text{عندما } x > 0) \\ 0 & (\text{عندما } x = 0) \\ -x & (\text{عندما } x < 0) \end{cases}$$

٢,٢٤ — نظرية

إذا كان x,z أي عددين حقيقيين ، فإن

(i) $|xy| = |x|\,|y|$

(ii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

البرهان

سنورد البرهان على (ii) ، التي تسمى أحياناً « متراجحة المثلث » . لدينا استناداً إلى التعريف $-|x| \leq x$ و $x \leq |x|$. كـذلك $-|y| \leq y$ و $y \leq |y|$. نستنتج من هـذا أن $-(|x|+|y|) \leq x+y$ و $x+y \leq |x|+|y|$ (لماذا؟). وإذا لاحظنا أن $|x+y|$ تساوي $x+y$ أو $-(x+y)$ فإننا نجد المطلوب . ■

٢,٢٥ — ملاحظة :

نسمي أحياناً حاصل الضرب xy^{-1} ، أي $x\frac{1}{y}$ ، **حاصل قسمة** x على y ، ونرمز له بـ $\frac{x}{y}$. وهكذا ، فيمكن أن نقول عن x^{-1} إنه حاصل قسمة 1 على x أو **مقلوب** x . وتبين المسلمة (٨) وجود مقلوب للعدد x شريطة أن يكون $x \neq 0$. ومن الواضح أنه لا يوجد للصفر مقلوب ، ذلك أنه لو وجد هذا المقلوب ورمزنا له بـ y لكان $0y = 1$ أو $1 = 0$ ،وهذا مخالف لما افترضناه في المسلمة (٨) من أن $1 \neq 0$. لذا ، فليس من معنى لـ 0^{-1} أو $\frac{1}{0}$. وبالتالي ، فإن افتراضنا بأن 0^{-1} أو $\frac{1}{0}$ يساوي ∞ ليس بذي معنى في نطاق المجموعة $\mathbb{R}$.

٢,٣ - الأعداد الطبيعية والصحيحة والعادية

Natural, Whole and Rational Numbers

سنمهد لتعريف الأعداد الطبيعية بتعريف ما يسمى بالمجموعة الاستقرائية .

٢,٣١ - تعريف

نقول عن مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ إنها **استقرائية** ، إذا كان $1 \in A$ ونتج عن كون $a \in A$ أن $a+1 \in A$.

٢,٣٢ - نظرية

(١) إن جماعة المجموعات الاستقرائية غير خالية .
(٢) إن تقاطع كل المجموعات الاستقرائية ، هو مجموعة استقرائية .

البرهان

(١) من الواضح أن $\mathbb{R}$ مجموعة استقرائية ، وبالتالي ، فإن (١) دعوى صحيحة .
(٢) لتكن $\{A_i\}, i \in I$ جماعة المجموعات الاستقرائية . سنبين أن $N = \bigcap_i A_i$ مجموعة استقرائية . لما كان $1 \in A_i$ أياكان i من I ، فإن $1 \in N$. لنفترض الآن أن $a \in N$. عندئذ $a \in A_i$ أياكان i من I . وبما أن A_i استقرائية ، فإن $a+1 \in A_i$ أياكان i من I ، أي $a+1 \in N$. ■

٢.٣٣ — تعريف

نعرف مجموعة **الأعداد الطبيعية** N (أو مجموعة **الأعداد الصحيحة الموجبة** N) بأنها تقاطع كل المجموعات الاستقرائية .

يترتب على هذا التعريف وعلى (٢,٣٢) أن N مجموعة استقرائية .

٢.٣٤ — نظرية (مبدأ الاستقراء الرياضي)

إذا كانت المجموعة الجزئية M من مجموعة الأعداد الطبيعية N استقرائية ، فإن $M = N$.

البرهان

بما أن M مجموعة استقرائية ، وأن N هي تقاطع كل المجموعات الاستقرائية ، فإن $N \subseteq M$. وبما أن $M \subseteq N$ فرضا ، إذن $M = N$. ■

يترتب على مبدأ الاستقراء الرياضي نتيجة هامة استخدمناها في الماضي وقبلناها بصورة حدسية .

٢,٣٥ ـــ نتيجة

لنفرض أنه يقابل كلّ عدد طبيعي x دعوى (قضية) P_x . سنبين الآن أنه إذا كانت الدعوى P_1 صحيحة،وكانت صحة P_x تقتضي صحة P_{x+1} ، فإن جميع الدعاوى P_x صحيحة . لتكن M مجموعة الأعداد الطبيعية x التي تصح من أجل كل منها الدعوى المقابلة P_x ، أي لتكن $M = \{x \in N : P_x\}$. من الواضح أن $M \subseteq N$ وأن $1 \in M$ (لأن P_1 صحيحة فرضا) . كذلك ، نلاحظ ، استنادا إلى أن $P_x \Rightarrow P_{x+1}$ ،وأن$x+1 \in N$ لأن N استقرائية ، أن $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$. وبالتالي ، فإنه يترتب على مبدأ الاستقراء الرياضي (٢,٣٤) أن $M = N$ ، أي أن العناصر التي تكون الدعوى من أجلها صحيحة هي جميع عناصر N . وبعبارة أخرى ، فإن P_x صحيحة أيا كان العدد الطبيعي x .

٢,٣٦ ـــ نظرية

أياً كان x من N فإن $1 \leq x$. ونعبر عن هذا ، بقولنا إن 1 هو أصغر الأعداد الطبيعية .

البرهان

لنأخذ المجموعة $M = \{x \in N : 1 \leq x\}$. من الواضح أولاً أن $1 \in M$. لنفترض الآن أن $x \in M$ ، أي $1 \leq x$. من الواضح أنه يترتب على هذا أن $1+1 \leq x+1$. لكن $0 < 1$ كما رأينا في (١٠) من (٢,٢٢) ، إذن $1 < 1+1$. واستناداً إلى (٥) من (٢,٢٢) نجد $1 < x+1$ ، التي ينتج عنها $1 \leq x+1$. وبالتالي ، فإن $x+1 \in M$. واستناداً إلى مبدأ الاستقراء الرياضي ، نجد أن $M = N$ ، أي أن مجموعة الأعداد الطبيعية x ، التي كل منها أكبر أو يساوي 1 ، هي مجموعة الأعداد الطبيعية N بأكملها ، وهذا يعني أن 1 هو حقاً أصغر الأعداد الطبيعية . ■

٢,٣٧ ـــ نتيجة

أياًكان العددان الطبيعيان x,y ، فلا يمكن أن تتم المساواة $x+y=x$.

٢,٣٨ ـــ نظرية

إذا كان x عدداً طبيعياً بحيث $x \neq 1$ ، كان $x-1$ عدداً طبيعياً كذلك .

البرهان

لنفترض جدلاً أن $x \in N$ و $x \neq 1$ ، و $x-1 \notin N$. لنضع $M = N-\{x\}$. نلاحظ أن $1 \in M$ لأن $1 \in N$ و $x \neq 1$. كذلك ، نلاحظ أنه إذا كان $y \in M$ فإن $y \in N$ و $y \neq x$. إذن $y+1 \in N$ (لأن N استقرائية) و $y+1 \neq x$ (لأنه لو كان $y+1 = x$ لكان $y \in N$ = $x-1$) . وبالتالي ، فإن $y+1 \in M$. لذا ، فإن المجموعة الجزئية M من N إستقرائية . واستناداً الى (٢,٣٤) ، فإن $N = M = N-\{x\}$ ، وهذا مستحيل . إن سبب وقوعنا في هذا التناقض هو افتراضنا أن $x-1 \notin N$. لذا ، فلا بد أن يكون $x-1 \in N$. ■

٢,٣٩ — نظرية

أياً كان العددان الطبيعيان x,y ، فإن كلاً من $x+y$ و xy عدد طبيعي . (أي أن كلاً من عمليتي الجمع والضرب عملية داخلية على N) .

البرهان

لنفترض أولاً ، أن $M = \{z \in N : z+y \in N\}$. عندها نجد بسهولة أن $M = N$ (وذلك لأن $M \subseteq N$ ولأن M استقرائية) . وهذا يعني أن مجموع **أي** عدد طبيعي z مع العدد الطبيعي y هو عدد طبيعي . إذن $x+y \in N$

لنضع الآن $M = \{z \in N : zy \in N\}$. من السهل التحقق هنا أيضاًبأن $M = N$ ، وهذا يعني أن حاصل ضرب **أي** عدد طبيعي بالعدد y هو عدد طبيعي . إذن $xy \in N$. ■

٢,٣٩١ — نظرية

إذا كان x,y عددين طبيعيين بحيث $x < y$ ، فإن $y-x$ عدد طبيعي .

البرهان

لنرمز بـ M لمجموعة الأعداد الطبيعية z ،بحيث أنه إذا كان u عدداً طبيعياً يحقق الشرط $z < u$ فإن $u-z$ عدد طبيعي . وبعبارة أخرى ، لتكن M المجموعة

$$M = \{ z \in N : u \in N , z < u \Rightarrow u-z \in N\}$$

نلاحظ أن $1 \in M$ ، ذلك أنه إذا كان u عدداً طبيعياً بحيث $1 < u$ (وبالتالي ، $u \neq 1$) فإن $u-1 \in N$ استناداً إلى النظرية (٢,٣٨) . لنفترض $z \in M$. إذن $z \in N$ ، وبالتالي $z+1 \in N$. كذلك ، بما أن $z \in M$ ،فإذا كان $u \in N$ بحيث $z < u$ فإن $u-z \in N$. وبما أن $u-z = (u+1)-(z+1)$ ،فإننا نستنتج أنه إذا كان $u+1 \in N$ بحيث $z+1 < u+1$ ، فإن $(u+1)-(z+1) \in N$.وبالتالي ، فإن $z+1 \in M$. نستنتج من مبدأ الاستقراء الرياضي أن $M = N$ ، وهذا يعني أنه أياً كان العدد الطبيعي z الذي يحقق الشرط $z < u$ ، حيث u عدد طبيعي ما ،فإن $u-z \in N$ ، وهذا ما كنا نبغي . ■

٢,٣٩٢ — نظرية

أياً كان العدد الطبيعي x فلا وجود لعدد طبيعي y محصور بين x و $x+1$.

البرهان

لنفترض مؤقتاً أن ثمة عددين طبيعيين x,y ، بحيث $x<y<x+1$. عندئذ . يكون $y-x\in N$ استناداً إلى (٢,٣٩١) . وبالتالي ، فإن $y-x\geqslant 1$ وفق (٢,٣٦) ، أي $y\geqslant x+1$ ، الأمر الذي يناقض افتراضنا بأن $y<x+1$. وبالتالي ، فالنظرية صحيحة . ■

٢,٣٩٣ — نتيجة

يترتب على ما سبق أن أصغر عدد طبيعي هو 1 ، وأن $1+1$ عدد طبيعي أكبر من 1 ، ولا يوجد بين 1 و $1+1$ أعداد طبيعية . نعبر عن هذا بقولنا ، إن العدد الطبيعي $1+1$ يلي مباشرة العدد 1 . سنرمز للعدد الطبيعي $1+1$ بـ 2 . وبإجراء مناقشة مماثلة نجد أن $2+1$ عدد طبيعي يلي مباشرة العدد الطبيعي 2 ، وسنرمز لـ $2+1$ بـ 3 ، وهلم جرّا . وهكذا ، فيمكننا أن نكتب

$$N=\{1,2,3,\ldots\}$$

وذلك في حدود الرموز التي اصطلحناها .

سننتقل الآن إلى إثبات خاصة هامة للأعداد الطبيعية تسمى خاصة «الترتيب الجيد». وسنمهد للدخول في هذا الموضوع بتقديم التعريف التالي

٢,٣٩٤ — تعريف (العنصر الأصغر والعنصر الأكبر)

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. نقول عن العنصر a من A إنه **العنصر الأصغر** للمجموعة A ، ونكتب $a=\min A$ ، إذا كان $a\leqslant x$ أياً كان x من A . هذا ، ولا يمكن أن يكون لمجموعة أكثر من عنصر أصغر واحد ، ذلك ، أنه لو افترضنا a,a' عنصرين أصغرين لـ A ، فإن $a\leqslant a'$ (لأن a عنصر أصغر لـ A و $a'\in A$) ، كما أن $a'\leqslant a$ لسبب مماثل . وبالتالي فإننا نجد استناداً إلى (٢,٢٢) أن $a=a'$.

هذا ، ونترك للقارىء تعريف **العنصر الأكبر** للمجموعة A ، الذي نرمز له بـ $\max A$.

ومن الممكن التحقق بسهولة من أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $a=\min A$ هو أن يكون $a\in A$ و $a=\inf A$. كذلك ، فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون $a=\max A$ هو أن يكون $a\in A$ و $a=\sup A$.

٢,٣٩٥ — نظرية (الترتيب الجيد)

لكل مجموعة جزئية غير خالية A من N عنصر أصغر .

البرهان

لتكن B مجموعة الأعداد الطبيعية التي كل عنصر x منها يحقق الشرط $x < y$ ، أياً كان y من A . لما كانت $A \neq \emptyset$ ، فإن B لا يمكن أن تساوي N ، لأنه إذا كان $y \in A$ فإن $y+1 \notin B$. بما أن 1 أصغر الأعداد الطبيعية (٢,٣٦) ، فإن $1 \in B$. وعندها يترتب على مبدأ الإستقراء الرياضي أن هنالك عدداً طبيعياً z بحيث $z \in B$ و $z+1 \notin B$. أمّا $z \in B$ فتعني أن $z < y$ أياً كان y من A . وأما $z+1 \notin B$ فتعني أن هنالك عنصرا $y_1 \in A$ بحيث $y_1 < z+1$. لكن $y_1 < z + 1 \Rightarrow y_1 \leq z$ ، ذلك أنه لو لم يكن $y_1 \leq z$ لكان $z < y_1$ وفق (١٠) من (٢,٢١) ، ولوجدنا بالتالي عدداً طبيعياً y_1 بحيث $z < y_1 < z+1$ ، وهذا غير ممكن استناداً الى (٢,٣٩٢) . إذن $y_1 \leq z$. فإذا أضفنا إلى هذا أن $z < y_1$ (لأن $y_1 \in A$ و $z \in B$) ، فإن $y_1 = z$ وفق (٢,٢٢) . وهذا يعني أن z ينتمي إلى A . ولما كنا قد وجدنا أن $z \leq y$ أياًكان y من A ، فإن z هو العنصر الأصغر لـ A ، أي أن $z = \min A$. ∎

بعد أن عرفنا مجموعة الأعداد الطبيعية وسردنا أهم خواصها ، سننتقل إلى تعريف مجموعات جزئية شهيرة أخرى من $\mathbb{R}$.

٢,٣٩٦ — تعاريف

إذا رمزنا بـ $-N$ للمجموعة $\{x \in \mathbb{R} : -x \in N\}$ ، فإننا نعرّف مجموعة **الأعداد الصحيحة**،التي نرمز لها بـ Z،على أنها المجموعة $Z = -N \cup \{0\} \cup N$. وبعبارة أخرى ، فإن Z تتألف من كل الأعداد الحقيقية x ، بحيث $x \in N$ أو $-x \in N$ أو $x = 0$. أمـا مجموعـة **الأعـداد العـاديـة** ، التي نرمز لها بـ Q،فتعرف على أنها المجموعـة $Q = \{xy^{-1} : x \in Z, y \in Z - \{0\}\}$. وبعبارة أخرى ، فإن Q تتألف من كل الأعداد الحقيقية ، التي كل منها حاصل ضرب عدد صحيح بمقلوب عدد صحيح غير صفري . واستناداً إلى (٢,٢٥)،يمكن القول بأن Q هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\frac{x}{y}$ التي كل منها حاصل قسمة عدد صحيح x على عدد صحيح غير صفري y . وأخيراً ، فإن مجموعة **الأعداد غير العادية** ، تعرف على أنها المجموعة $\mathbb{R} - Q$.

٢,٤ — قابلية العد

Countability

إن عدّ عناصر مجموعة ما مسألة تدخل في صميم حياتنا اليومية . وبالطبع ، فإن ما نعدّه عندئذ يدخل في نطاق المجموعات التي تنعت بأنها «منتهية» ، ونعني بها المجموعات المؤلفة من «قدر معين» من العناصر المختلفة ، أي المجموعات التي تنتهي عملية عد عناصرها المختلفة عند حد معين . أما المجموعات «غير المنتهية»،فمن الواضح أن عملية عد عناصرها ليس لها حدود ، بل إن بعض هذه المجموعات توصف بأنها «غير قابلة للعد» . وكي نبين ماذا نقصد بهذه العبارات المبهمة ، التي تبدو بعيدة كل البعد عن المفاهيم الرياضية الدقيقة ، فإننا سنبتدىء بالتعريف التالي ، الذي أحدث ثورة عارمة في تاريخ الفكر الرياضي ، والذي يعود الفضل فيه إلى الرياضي الفذ جورج كانتور .

٢,٤١ — تعريف

نقول عن مجموعة A إنها **مكافئة** لمجموعة B ، ونكتب $A \approx B$ ، إذا وجدت دالة $f: A \to B$ متباينة وغامرة .

نستنتج من هذا التعريف ، ومن كون الدالة الخالية متباينة وغامرة (١,٣٩٩٣) ، أن المجموعة الخالية مكافئة لنفسها، أي أن $\varnothing \approx \varnothing$.

٢,٤٢ — أمثلة

(١) إن مجموعة دول العالم تكافىء مجموعة عواصمها .

(٢) إن $[1,2] \approx [4,9]$ ، ذلك أنه يمكن التحقق بسهولة من أن الدالة $f: [1,2] \to [4,9]$ ، المحددة بالدستور $f(x) = 5x - 1$ ، متباينة وغامرة .

(٣) لنأخذ مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1,2,3,\ldots\}$ ، ومجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية $E = \{2,4,6,\ldots\}$. إن $N \approx E$ لأن الدالة $f: N \to E$ ، المحددة بالقاعدة $f(x) = 2x$ ، متباينة وغامرة .

٢,٤٣ — نظرية

إن العلاقة $A \approx B$ هي علاقة تكافؤ على جماعة المجموعات الجزئية من مجموعة كلية .

البرهان

(١) أياً كانت المجموعة A ، فإن $A \approx A$ ، ذلك أن دالة المطابقة $I_A : A \to A$ متباينة وغامرة . إذن فالعلاقة $\approx$ منعكسة .

(٢) إذا كان $A \approx B$ ، فإن $B \approx A$ ، ذلك أنه اذا كانت $f: A \to B$ متباينة وغامرة،فتوجد دالة $f^{-1}: B \to A$ متباينة وغامرة كذلك (١,٣٩٩٦) . إذن $\approx$ علاقة متناظرة .

(٣) إذا كان $B \approx C$, $A \approx B$ ، فهنالك دالتان $g: B \to C$, $f: A \to B$ متباينتان وغامرتان . وعندئذ ، تكون الدالة $g \circ f: A \to C$ متباينة وغامرة . إذن $A \approx C$ ، أي أن $\approx$ علاقة متعدية . ■

٢,٤٤ — تعريف

نقول عن مجموعة A إنها **منتهية** إذا كانت خالية،أوكانت مكافئة للمجموعة الجزئية $\{1,2,\ldots,n\}$ من N ، حيث n عدد طبيعي ما . نقول في الحالة الأولى إن A **تحوي 0 عنصراً** ، ونقول في الحالة الثانية إن A **تحوي n عنصراً** . وتسمى كل مجموعة غير منتهية مجموعة **لا منتهية** .

٢,٤٥ — تعريف (قابلية العد)

إذا كانت A مجموعة مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية N ، فإننا نقول عن A إنها مجموعة **قابلة للعد اللامنتهي** . ونقول عن مجموعة إنها **قابلة للعد** إذا كانت قابلة للعد اللامنتهي،أوكانت منتهية . وفيا عدا ذلك ، أي إذا كانت A مجموعة لا منتهية وغير مكافئة لـ N ، فإننا نقول عن A إنها مجموعة **غير قابلة للعد** .

٢,٤٦ — أمثلة

(١) إن مجموعة سكان العالم مجموعة منتهية .

(٢) لما كانت $N \approx N$ فإن N قابلة للعد اللامنتهي . وقد رأينا في (٣) من (٢,٤٢) أن مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية قابلة للعد اللامنتهي كذلك .

(٣) إن مجموعة الأعداد الصحيحة Z قابلة للعد اللامنتهي . ونترك للقارىء التحقق من أن الدالة $f: Z \to N$ المحددة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} 2n & (n > 0 \text{ عندما}) \\ -2n+1 & (n < 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

متباينة ومغامرة .

سنورد الآن معياراً بالغ الأهمية للمجموعة اللامنتهية . ولهذا الغرض سنقدم أولاً التمهيد التالي .

٢,٤٧ — تمهيد

كل مجموعة لا منتهية لا بد وأن تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد اللامنتهي .

البرهان

إذا كانت A مجموعة لا منتهية فإنها غير خالية ، وبالتالي ، يوجد عنصر a_1 بحيث $a_1 \in A$. لنأخذ الآن المجموعة $A-\{a_1\}$. إن هذه المجموعة غير خالية (ذلك أنه لوكانت خالية لكانت مؤلفة من عنصر وحيد هو a_1 ، ولكانت بالتالي منتهية) ، إذن يوجد عنصر a_2 ، بحيث $a_2 \in A-\{a_1\}$. وبالسير على هذا المنوال ، نجد عنصرا a_3 ، بحيث $a_3 \in A-\{a_1,a_2\}$ ، وفي الحالة العامة نجد عنصرا $a_{n+1} \in A-\{a_1,\ldots a_n\}$. إن عملية اختيار العناصر المختلفة $a_1,a_2,a_3,\ldots$ لا يمكن لها أن تتوقف ، ذلك أنها لو توقفت لكانت A مجموعة منتهية . لذا ، فاننا نستنتج أن A تحوي المجموعة القابلة للعد اللامنتهي $\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$. ■

٢,٤٨ — نظرية

كل مجموعة لا منتهية لا بد أن تكون مكافئة لمجموعة جزئية تماماً منها .

البرهان

لتكن A مجموعة لا منتهية . عندئذ ، نحكم استناداً الى التمهيد السابق،بوجود مجموعة قابلة للعد اللامنتهي ، ولتكن $B=\{a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$ ، محتواة في A . لنعرف الآن الدالة $h: A \to A-\{a_1\}$ بالدستور :

$$h(x) = \begin{cases} a_{n+1} & (\text{عندما } x = a_n) \\ x & (\text{عندما } x \notin B) \end{cases}$$

من السهل ، التحقق من أن h دالة متباينة وغامرة ، وبالتالي ، فإن A تكافىء مجموعة جزئية تماماً من A هي $A-\{a_1\}$. ■

سنثبت الآن أن عكس النظرية (٢,٤٨) صحيح . ولادراك هدفنا هذا نورد أولاً التمهيد التالي ، الذي نترك إثباته للقارىء .

٢,٤٩ — تمهيد

إذا كانت ساحةُ دالة مؤلفةً من n عنصراً ، فإن مدى هذه الدالة يحوي n عنصراً على الأكثر .

٢,٤٩١ — نظرية

إذا كانت المجموعة A مكافئة لمجموعة جزئية **تماما** منها فلا بد أن تكون المجموعة A لا منتهية .

البرهان

لنفترض جدلا أن A تكافيء المجموعة الجزئية تماما B من A ، وأن A مجموعة منتهية . عندئذ هنالك دالة متباينة وغامرة f للمجموعة A على المجموعة B . إذا افترضنا أن الساحة A للدالة f تحوي n عنصراً ، فلا بد أن يحوي المدى B لهذه الدالة m عنصراً بحيث $m < n$ (٢,٤٩) . لنأخذ الآن الدالة $f^{-1}: B \to A$. لما كانت ساحة f^{-1} مؤلفة من m عنصراً فاننا نستنتج ثانية من (٢,٤٩) أن A مدى f^{-1} يحوى m عنصراً على الأكثر ، أي أن $n < m$. وبالتالي ، فإننا نجد استناداً إلى (٤) من (٢٢ ، ٢) أن $n = m$،أي أن $A = B$. ولما كان هذا يناقض افتراضنا بأن B مجموعة جزئية تماما من A،فإن نظرتنا لا غبار عليها . ■

إذا ضمّنّا النظرية (٢,٤٨) وعكسها (٢,٤٩١) في نظرية واحدة ، وجدنا المعيار المنشود التالي للمجموعات اللامنتهية .

٢,٤٩٢ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعةٌ A لا منتهية هو أن تكافيء هذه المجموعة مجموعة جزئية **تماماً** من A .

سننتقل الآن إلى مسألة إثبات أن مجموعة الأعداد العادية Q قابلة للعد اللامنتهي . ولبلوغ هدفنا هذا سنقوم أولا بإثبات التمهيدين التاليين .

٢,٤٩٣ — تمهيد

كل مجموعة جزئية لا منتهية من مجموعة قابلة للعد اللامنتهي لا بد وأن تكون قابلة للعد اللامنتهي .

البرهان

لتكن A مجموعة قابلة للعد اللامنتهي ، ولتكن B مجموعة لا منتهية بحيث $B \subseteq A$. لما كانت A قابلة للعد اللامنتهي ، فهنالك دالة متباينة وغامرة $f: N \to A$. لتكن $C = f^{-1}(B)$ ، أي أن C تعني استناداً الى (١,٣٨) المجموعة

$$C = \{ n \in N: f(n) \in B\}$$

من الواضح أن $C \subseteq N$ و $f(C) = B$. كذلك ، فإن C لا منتهية،لأنها لو لم تكن كذلك ، لوجدنا وفق (٢,٤٩) أن مدى C وفق f ، أي B ، مجموعة منتهية ، وهذا مخالف للفرض .

من الواضح ، أنه إذا برهنا أن C قابلة للعد المنتهي ، فإن B تكون كذلك ، ذلك أنه يكون عندئذ $C \approx N$ و $C \approx B$ (لأن $f(C) = B$ و f متباينة وغامرة) ، وبالتالي ، يكون $C \approx B$ لأن $\approx$ علاقة متعدية (٢.٤٣) . وهكذا فإننا نصل الى هدفنا ، إذا أثبتنا وجود دالة متباينة وغامرة g لـ N على C .

إن أسلوب بناء هذه الدالة g يتم على النحو التالي:

$g(1)$ هو العنصر الاصغر في C (وهو موجود لأن C مجموعة جزئية غير خالية من N وبالتالي . فهي مرتبة جيداً. (٢.٣٩٥) .

$g(2)$ هو العنصر الأصغر في $C-\{g(1)\}$ (وهو موجود) .

....

$g(n)$ هو العنصر الأصغر في $C-\{g(1),\ldots,g(n-1)\}$ (وهو موجود) .

....

من الواضح أن ساحة الدالة g هي N . ولاتمام إثبات نظريتنا ، علينا التأكد من أن g متباينة وغامرة . لنفترض من أجل هذا ، أن P_n هي الدعوى التالية : توجد دالة وحيدة g_n ساحتها $\{1,\ldots,n\}$ ومداها في C، بحيث أنه إذا كان $j < k \leq n$ فإن $g_n(j) < g_n(k)$ ، وأنه إذا كان $l \in C$ و $l < g_n(n)$ فإن $l \in \mathcal{R}(g_n)$ (حيث $\mathcal{R}(g_n)$ هو مدى الدالة g_n). إن الدعوى P_1 صحيحة ، وهذا يتضح إذا أخذنا $g_1(1)$ أصغر عنصر في C . لنفترض الآن أن P_n صحيحة ، ولنعرف الدالة $g_{n+1}(k)$ بحيث أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $g_{n+1}(k) = g_n(k)$ هو أن يكون $k < n+1$، وأن يكون $g_{n+1}(n+1)$ العنصر الأصغر في $C-\mathcal{R}(g_n)$. سنترك للقارىء التأكد من أن كل شروط الدعوى P_{n+1} محققة . وبالتالي ، فإن الدعوى P_n صحيحة أيا كان n من N .

سنعرف الآن $g(n) = g_n(n)$. عندئذ نكون قد عرفنا دالة ساحتها N ومداها $\mathcal{R}(g)$ محتوى في C . ان g تتمتع بالخاصة التالية : إذا كان $j < k$ فإن $g(j) < g(k)$. واذا كان $l \in C$ و $l < g(n)$ من أجل عدد ما n من N، فإن $l \in \mathcal{R}(g)$. لإثبات هاتين الدعويين، نلاحظ أولا أنه إذا كان $k \leq n$ فإن $g_n(k) = g_k(k)$. إن هذا أمر ناتج عن وحدانية الدالة g_k . وفي الحقيقة ، فإذا قصرنا الدالة g_n على المجموعة $\{1,2,\ldots,k\}$، فإننا نجد دالة لها كل خواص الدالة g_k . لذا ، فإذا كان $j < k$ وجدنا

$$g(j) = g_j(j) = g_k(j) < g_k(k) = g(k)$$

وإذا كان $l < g(n)$ و $l \in C$ فإن $l < g_n(n)$، وبالتالي ، نجد استناداً إلى P_n أن هنالك k بحيث $k \leq n$ وبحيث

$$l = g_n(k) = g_k(k) = g(k)$$

نستنتج مما سبق أن الدالة g متباينة ، ذلك أنه إذا كان $g(m) = g(n)$ فإن $m = n$ ، بسبب أنه إذا كان $m < n$ وجدنا $g(m) < g(n)$ ، وإذا كان $n < m$ وجدنا $g(n) < g(m)$ ، وفي كلا الحالتين لا يكون $g(m) = g(n)$ كذلك . فإن الدالة $g: N \to C$ غامرة . وفي الحقيقة ، إذا لم تكن C كذلك ، لكان $C - \mathcal{R}(g) \neq \emptyset$. ليكن n أصغر عنصر في $C - \mathcal{R}(g)$. عندئذ تكون المجموعة $\{k : g(k) < n\}$ غير خالية ومنتهية ، وبالتالي فلها عنصر أكبر m . لكن $g(m+1) \geq n$ ، وهذا يعني أن $n \in \mathcal{R}(g)$ ، ونكون بذلك قد وقعنا في تناقض . إذن g دالة غامرة كذلك ، وبذا يتم إثبات النظرية.■

٢,٤٩٤ — نظرية

إن مجموعة الأعداد العادية الموجبة Q^+ قابلة للعد اللامنتهي .

البرهان

لنعرف الدالة $f: Q^+ \to N$: بالدستور $f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^m 3^n$ بفرض m,n عددين طبيعيين . ان f دالة متباينة .
وفي الحقيقة ، إذا كان $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)$ ، حيث m,n,p,q أعداد طبيعية ، فإن $2^m 3^n = 2^p 3^q$ ،يترتب على ذلك أن $m = p$، ذلك أنه لوكان $m < p$ لوجدنا $3^n = 2^{p-m} 3^q$ ، وهذا غير ممكن لأن الطرف الأيسر فردي والأيمن زوجي . ونجد بصورة مماثلة أنه لا يمكن أن يكون $p < m$. إذن $m = p$ وبالتالي $3^n = 3^q$. كذلك فإن $n = q$ ذلك أنه لوكان $n < q$ لوجدنا $1 = 3^{q-n}$ وهذا غير ممكن لأن $3^{q-n} > 1$. ونجد بصورة مماثلة أنه لا يمكن أن يكون $q < n$. إذن $n = q$.
وبالتالي ، فإننا نستنتج أن

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) \Rightarrow m = p, n = q \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

أي أن f دالة متباينة .

وإذا لاحظنا أن $A = \{ 2^m 3^n : m \in N, n \in N - \{0\} \}$ مجموعة جزئية لا منتهية من N ، فإننا نستنتج استناداً إلى التمهيد السابق (٢,٤٩٣) أن A مجموعة قابلة للعد اللامنتهي . وهكذا ، فإن f تطبيق متباين وغامر لـ Q^+ على المجموعة A القابلة للعد اللامنتهي . إذن $Q^+ \approx A$. لكن $A \approx N$ ، إذن $Q^+ \approx N$ استناداً إلى (٢,٤٣)،وهو المطلوب . ■

٢,٤٩٥ — نتيجة

من السهل التحقق من أن الدالة $f: Q^+ \to Q^-$ المحددة بالدستور $f(x) = -x$ متباينة وغامرة . وبالتالي ، فإن $Q^+ \approx Q^-$ ولما كانت $Q^+ \approx N$ استناداً الى النظرية السابقة ، فإنه يترتب على كون العلاقة $\approx$ متعدية أن $Q^- \approx N$،أي أن مجموعة الأعداد العادية السالبة قابلة للعد اللامنتهي .

٢,٤٩٦ — نظرية

إن مجموعة الأعداد العادية Q قابلة للعد اللامنتهي .

البرهان

وجدنا في (٢,٤٩٥) أن $Q^- \approx N$. ولما كان من السهل التحقق بأن $N \approx -N$ ، حيث $-N$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ، فإننا نستنتج استناداً إلى اتّصاف العلاقة $\approx$ بالتعدي أن $Q^- \approx -N$. وهذا يعني وجود دالة $f: -N \to Q^-$ متباينة وغامرة . ولما كان $Q^+ \approx N$ استناداً إلى (٢,٤٩٤) ، فثمة دالة $g: N \to Q^+$ متباينة وغامرة كذلك .
لنعرف الآن الدالة $h: Z \to Q$ كما يلي :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (\text{عندما } x \in -N) \\ 0 & (\text{عندما } x = 0) \\ g(x) & (\text{عندما } x \in N) \end{cases}$$

من السهل التحقق من أن الدالة $h: Z \to Q$ متباينة وغامرة ، وبالتالي ، فإن $Q \approx Z$. ولما كان $Z \approx N$ ، كما سبق وأثبتنا في (٢,٤٦)،فإننا نستنتج أن $Q \approx N$ ، أي أن مجموعة الأعداد العادية Q قابلة للعد اللامنتهي . ■

٢,٥ ـــ الأعداد الحقيقية

The Real Numbers

عرّفنا في (٢,٢١) الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بأنها حقل مرتب تام . وقد شرحنا في (٢.٢) ماذا يعني الحقل المرتب وذلك بايراد مسلماته ، التي اهّلتنا لدراسة البنية الجبرية لـ $\mathbb{R}$.

وسنورد الآن الخاصة المميزة للأعداد الحقيقية عن الأعداد العادية . ويعبر عن هذه الخاصة بمسلمة التمام ، التي لم يدرك تماما دورها الفعال في علم التحليل الرياضي الا في أواخر القرن التاسع عشر . ويمكننا القول بكل ثقة بأنه ما من نتيجة بارزة في علم التحليل الرياضي،إلا وتمتد جذورها إلى مسلمة التمام .

٢,٥١ ـــ مسلمة التمام (مسلمة الحد الأعلى)

لكل مجموعة جزئية غير خالية ومحدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$ حد أعلى .

يتعين على مسلمة التمام مسلمة تقابلها للمجموعات المحدودة من الأدنى نجدها في النظرية التالية :

٢,٥٢ ـــ نظرية

لكل مجموعة جزئية E غير خالية ومحدودة من الأدنى في $\mathbb{R}$ حد أدنى .

البرهان

لنشكل المجموعة $F = \{ y\in\mathbb{R}$: y عنصر حاد من الأدنى لـ $E \}$. ان F غير خالية لأن E محدودة من الأدنى . كذلك ، فإن F محدودة من الأعلى بكل عنصر من E . لذا ، نجد استنادا إلى مسلمة التمام أن $\sup F$ موجود . وهذا يعني أنه اياكان y من F فإن $y \le \sup F$. ولما كان كل عنصر x من E حادا من الأعلى للمجموعة F ، فإن $\sup F \le x$ اياكان x من E ، وهذا يدل على أن $\sup F$ عنصر حاد من الأدنى للمجموعة E . ولما كنا قد وجدنا أنه اياكان y من F فإن $y \le \sup F$ ، فإن $\sup F$ هو الحد الأدنى لـ E ، أي أن $\sup F = \inf E$. ■

سنورد الآن نظرية تربط بين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$،ويمكن استخلاصها من مسلمة التمام .

٢,٥٣ — نظرية (أرخميدس)

إذا كان x عدداً حقيقياً موجباً فهنالك عدد طبيعي n ، بحيث يكون $x < n$.

البرهان

لنفترض مؤقتاً أن $n < x$ أياكان n من N . إن هذا يعني أن N محدودة من الأعلى بالعدد x . واستناداً إلى مسلمة التمام ، فإنه يوجد لـ N حد أعلى ، أي أنه يوجد عدد حقيقي a ، بحيث $a = \sup N$. لنفترض n عدداً طبيعياً ما . عندئذ ، لا بد أن يكون $n+1 \in N$ (لأن N مجموعة استقرائية) ، وبالتالي ، $n+1 < a$ ، أي $n < a-1$ ، وهذا يعني أن $a-1$ عنصر حاد من الأعلى لـ N ، الأمر الذي ينافي كون a حدا أعلى لـ N . وبالتالي ، فالنظرية صحيحة . ■

٢,٥٤ — نتائج

(١) إذا كان x عددا حقيقيا ، بحيث يكون $0 < x < \frac{1}{n}$ أياكان العدد الطبيعي n ، فإن $x = 0$.

البرهان

لنفترض جدلا أن $x \neq 0$. لما كان $x > 0$ و $x < \frac{1}{n}$ أياكان n من N فإننا نستنتج أن $n < \frac{1}{x}$ أياكان n من N . ولما كان هذا مناقضاً لنظرية أرخميدس (٢,٥٣) لأن $\frac{1}{x} > 0$ (٢,٢٢) ، فإن النتيجة صحيحة . ■

(٢) إذا كان $|a-b| < \varepsilon$. أياكان العدد الموجب ε، فإن $a = b$.

البرهان

إذا وضعنا $\frac{1}{n} = \varepsilon$ فإننا نستنتج أن $0 < |a-b| < \frac{1}{n}$. أياكان n من N . وبالتالي . نجد استنادا إلى النتيجة السابقة أن $|a-b| = 0$ أي $a = b$. ■

(٣) إذا كان a,b عددين حقيقيين بحيث يكون $a < b + \varepsilon$ ، أياكان العدد الموجب ε ، فإن $a < b$.

البرهان

لنفترض جدلا أن $a > b$ ، إذن $a - b > 0$. وبالتالي نجد $|a-b| = a-b < \varepsilon$. واستناداً إلى النتيجة السابقة (٢) ، نجد $a = b$ ، ونكون بذلك قد وقعنا في تناقض . إذن لا بد أن يكون $a < b$. ■

هنالك نقيصة في الأعداد العادية Q عرفها رياضيو اليونان القديمة ، وكانت الحافز الرئيسي الذي أدى فيما بعد للتوصل إلى الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$: فليس كل عدد موجب في Q له جذر تربيعي ، أي أنه إذا كان a عددا عادياً موجبا ما ، فليس من الضروري أن نجد دوما عددا عاديا x بحيث $x^2 = a$. وعلى سبيل المثال ، لنفترض $a = 2$ ، ولنقبل جدلا وجود عدد x في Q بحيث $x^2 = 2$. عندئذ يكون $x = \frac{p}{q}$ ،حيث p,q عددان صحيحان غير زوجيين معا (لأنه لو كان p,q زوجيين،فمن الممكن اختصار الكسر وتحويله إلى كسر صورته وبسطه غير زوجيين معا) . عندئذ يكون $p^2 = 2q^2$ ، وهذا يعني أن p^2 ، وبالتالي p ، عدد زوجي ، أي $p = 2k$. وعندها يكون $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ الأمر الذي يقتضي كون $q^2 = 2k^2$ ، أي كون q^2 عددا زوجياً . وبالتالي ، فإن q عدد زوجي ، وهذا ينافي افتراضنا بأن p,q غير زوجيين معا .

وتبين النظرية الآتية أن الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ خالية من هذا العيب ، الذي اتسمت به Q.

٢,٥٥ — نظرية

أياكان العدد الحقيقي الموجب a ، فيوجد عدد حقيقي موجب x ، بحيث يكون $x^2 = a$.

البرهان

لنأخذ المجموعة $E = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 < a\}$. إن $E \neq \emptyset$ لأن $0 \in E$.كذلك ، فإن E محدودة من الأعلى ، ذلك ، أنه في الحالة $1 < a$ نجد أنه إذاكان $a < y$ فإن $a < y^2$ ، وأنه في الحالة $a < 1$ نجد أنه إذاكان $1 < y$ فإن $a < 1 < y^2$. لنرمز بـ x لهذا الحد الأعلى، أي $x = \sup E$ ، وسنثبت أن $x^2 = a$.إن $x > 0$ ، ذلك أنه في الحالة $1 < a$ نجد $1^2 < a$ ، وبالتالي $1 \in E$ ، وفي الحالة $a < 1$ نجد $a^2 < a$ وبالتالي $a \in E$.

ليكن ε عددا موجبا بحيث $0 < \varepsilon < x$. عندئذ ، يكون $0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon$. ويكون بالتالي $(x-\varepsilon)^2 < x^2 < (x+\varepsilon)^2$. لذا ، فإن $x - \varepsilon \in E$ في حين $x + \varepsilon \notin E$. وينتج من هذا أن $(x-\varepsilon)^2 < a < (x+\varepsilon)^2$. يتعين على هذه المتراجحات ومن المتراجحات السابقة لها أن

$$(x-\varepsilon)^2 - (x+\varepsilon)^2 < x^2 - a < (x+\varepsilon)^2 - (x-\varepsilon)^2$$

أي $-4x\varepsilon < x^2 - a < 4x\varepsilon$.

وهذا يعني أن $|x^2 - a| < 4x\varepsilon$. واستنادا إلى النتيجة (٢) من (٢,٥٤) نجد $x^2 = a$. ■

من أهم النتائج المترتبة على نظرية أرخميدس ، تلك المتعلقة بخواص «الكثافة» في $\mathbb{R}$ ، الأمر الذي تقرره النظرية التالية .

٢,٥٦ — نظرية

إن الأعداد العادية Q **كثيفة في** $\mathbb{R}$ ،بمعنى أنه إذاكان x,y عددين حقيقيين بحيث $x < y$ ، **فهنالك عدد عادي** γ **محصور بينهما** ، أي أنه يوجد γ من Q بحيث $x < \gamma < y$.

البرهان

(i) لنفترض أولاً $x>0$. عندئذ يوجد عدد n من N بحيث يكون $\frac{1}{n}<y-x$ ، ذلك أن نظرية أرخميدس تقرر وجود عدد n من N بحيث يكون $n>\frac{1}{y-x}$.كذلك ، فهنالك عدد m من N بحيث يكون $y<\frac{m}{n}$ لأن نظرية أرخميدس تحكم بوجود عدد m من N بحيث $yn<m$. إن المجموعة $E=\{m\in N: y<\frac{m}{n}\}$ ليست خالية . لذا ، نجد استناداً إلى نظرية الترتيب الجيد (٢,٣٩٥) أن ثمة عنصراً أصغر لـ E نرمز له بـ p . لذا ، فإن $\frac{p-1}{n}<y<\frac{p}{n}$. لكن لدينا أيضاً

$$x=y-(y-x)<\frac{p}{n}-\frac{1}{n}=\frac{p-1}{n}$$

إذن $x<\frac{p-1}{n}<y$. وبالتالي ، فإن $\frac{p-1}{n}$ عدد عادي يحقق متطلبات النظرية .

(ii) لنفترض الآن $x=0$. عندئذ يكون $0<\frac{1}{2}y<y$. واستناداً إلى الحالة السابقة (i) نجد أن ثمة عدداً عادياً r بحيث يكون $0=x<\frac{1}{2}y<r<y$.

(iii) لنفترض أخيراً $x<0$. عندئذ ، إما أن يكون $x<0<y$ ، وفي هذه الحالة يكون العدد 0 هو العدد العادي المطلوب ، أو يكون $|y|<|x|$ ، وعندها نجد استناداً إلى الحالة (i) أن ثمة عدداً عادياً r بحيث $|y|<r<|x|$ ، أي $x<-r<y$. ■

سنبين أخيراً أن مجموعة الأعداد غير العادية كثيفة في $\mathbb{R}$.

٢,٥٧ — نظرية

إن الأعداد غير العادية كثيفة في $\mathbb{R}$ ، بمعنى أنه إذا كان x,y عددين حقيقيين بحيث $x<y$ ،فيوجد عدد غير عادي s بحيث $x<s<y$.

البرهان

نحكم اعتماداً على (٢,٥٦) بوجود عدد عادي r بحيث $x<r<y$. يكفي الآن أن نثبت مقدرتنا على إيجاد عدد غير عادي t ، بحيث يكون $0<t<y-r$ ، لأنه عندئذ ، يكون $s=r+t$ هو العدد غير العادي المطلوب . وبعبارة أخرى ، فيكفي إثبات أنه إذا كان z أي عدد حقيقي موجب ، فيمكن إيجاد عدد غير عادي t بحيث يكون $0<t<z$.

وفي الحقيقة ، فإنه يترتب على نظرية أرخميدس أن هنالك عدداً طبيعياً n ، بحيث يكون $n > \frac{\sqrt{2}}{z}$. وبالتالي ، فإننا نجد أن العدد غير العادي المطلوب t هو $\frac{\sqrt{2}}{n}$ لأن $0 < t = \frac{\sqrt{2}}{n} < z$. ∎

٢،٥٨ — التمثيل العشري للأعداد الحقيقية

يبرهن في بحث السلاسل الحقيقية أن لكل عدد حقيقي x صيغة عشرية من الشكل $x = \pm A.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ حيث A إما 0 أو عدد طبيعي،وحيث كلٌّ من a_i هو أحد الأعداد الصحيحة من 0 الى 9 . وما الصيغة العشرية $A.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ الا رمز «للسلسلة غير المنتهية» .

$$A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$$

وعندما يكون A مساوياً للصفر وتكون كل الأعداد a_i متساوية وتساوي a مثلاً ، فإن سلسلتنا تسمى «سلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{10}$» ويكون «مجموعها» $a\left(\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{a}{9}$.

فإذا كان a = 9 فيكون مجموع هذه السلسلة 1 ، وهذا يعني أن للعدد واحد تمثيلين عشريين اثنين ، أي أن $1 = 1.000\ldots = 0.999\ldots$. وبوجهٍ أعم ، فإذا كان لعدد تمثيل عشري ينتهي بأصفار مثل $\frac{1}{4} = 0.25000$ ، فإنه يمكن إيراد تمثيل عشري له ينتهي بتسعات بدلاً من الأصفار شريطة إنقاص آخر عدد عشري واحداً . وهكذا ، فإن $\frac{1}{4} = 0.24999$. وفيما عدا هذه الحالة ، فإن لكل عدد حقيقي تمثيلاً عشرياً وحيداً .

هذا ، ويبرهن أنه يمكن التفريق بين الأعداد العادية وغير العادية عن طريق التمثيل العشري : فالأعداد العادية هي تلك التي لها تمثيل عشري دوري ، فمثلاً

$$\frac{1}{8} = 0.124\underline{9} \ , \quad \frac{1}{7} = 0.\underline{142857} \quad , \quad \frac{1}{3} = 0.\underline{3}$$

حيث نعني بالجزء من التمثيل العشري ، الذي وضعنا أسفله خطاً — ،الجزء المتكرر بلا تناه . أما العدد غير العادي فليس في تمثيله العشري جزء متكرر .

ثمة فرق ذو طبيعة أخرى بين مجموعة الأعداد العادية Q ومجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وهذا الفرق يتعلق بقابلية العد . ففي حين أثبتنا أن Q قابلة للعد ، سنثبت أن $\mathbb{R}$ ليست كذلك .

٢,٥٩ — نظرية

إن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد .

البرهان

لنفترض جدلاً أن $\mathbb{R}$ قابلة للعد . لما كانت $\mathbb{R}$ لا منتهية ، فإنها قابلة للعد اللامنتهي . ولما كانت $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ مجموعة جزئية لا منتهية من $\mathbb{R}$ ، فإننا نستنتج من (٢,٤٩٣) أن A قابلة للعد اللامنتهي . وهذا يعني أن ثمة دالة $f : N \to A$ متباينة وغامرة . وبعبارة أخرى ، فإننا نستنتج أن هنالك متوالية $\{a_n\}, n \in N$ تشكل عناصرها كل المجموعة A . سنبين استحالة هذا الأمر ، وذلك بإيجاد عدد حقيقي في A لا يشكل أياً من عناصر هذه المتوالية . لنكتب كل عنصر a_n بصيغته العشرية

$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots$$

حيث كلٌ من a_{ni} هو أحد الأعداد الصحيحة $0,1,2,\ldots,9$. لنأخذ العدد الحقيقي y ذا الصيغة العشرية $y = 0.b_1b_2b_3\ldots$ ، حيث

$$b_n = \begin{cases} 1 & (\text{عندما } a_{nn} \neq 1) \\ 2 & (\text{عندما } a_{nn} = 1) \end{cases}$$

نلاحظ عندئذ ، أنه لا يمكن لأي عنصر من المتوالية $\{a_n\}, n \in N$ أن يساوي y ، لأن y يختلف عن a_1 في رقمه العشري الأول ، وعن a_2 في رقمه العشري الثاني ، ... ، وعن a_n في رقمه العشري ذي الترتيب n . (هذا ولا يمكن لوضع مماثل لكون $a_n = 0.1999\ldots$ و $y = 0.2000\ldots$ أن يحدث،بسبب الطريقة التي اخترنا بها b_n) وبما أن $0 < y < 1$ فإننا نكون قد أثبتنا صحة النظرية . ■

٢,٥٩١ — تعريف (المجالات)

يعرف **المجال** I بأنه مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، بحيث أنه إذا كان $x,y \in I$ فإن أي عدد حقيقي z ، يحقق الشرط $x < z < y$ ،لا بد أن ينتمي إلى I كذلك . وتبين مسلمة التمام (٢,٥١) ونتيجتها (٢,٥٢) أن لكل مجال محدود من الأعلى حداً أعلى b ، وأن لكل مجال محدود من الأدنى حداً أدنى a . تسمى النقطتان a,b **طرفي** المجال I ، بغض النظر عما إذا كان a,b منتميَيْن إلى المجال أم لا . وتسمى نقاط المجال الأخرى **نقاطاً داخلية له** . وسنميز فيما يلي أنماطاً مختلفة من المجالات

(i) **المجال المغلق** :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

(ii) **المجال المفتوح** :

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

(iii) المجال نصف المفتوح من الأيسر (أو نصف المغلق من الأيمن) :

$$]a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

(iv) المجال نصف المفتوح من الأيمن (أو نصف المغلق من الأيسر) :

$$[a,b[= \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}$$

هذا ، وإذا كان $a = b$ ، فإنه يقال عن المجالات الأربعة السابقة إنها **منحطة** ؛ في هذه الحالة ، يكون المجال المغلق مؤلفاً من نقطة واحدة ، أي $[a,b] = \{a\}$ ، في حين تكون المجالات الثلاثة الباقية خالية . وسنفترض دوماً ، أن المجالات غير منحطة ما لم ننص على خلاف ذلك .

إن المجالات الأربعة ، التي عرفناها فيما سبق تسمى **محدودة** . الا أن ثمة مجالات أخرى تدعى **مجالات غير محدودة** هي :

$$]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad و \quad [a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]-\infty, a[= \{ x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad و \quad]-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

كذلك فإننا نرمز أحياناً لـ $\mathbb{R}$ بالشكل $]-\infty, +\infty[$.

تسمى المجالات غير المحدودة $]a, +\infty[$ و $]-\infty, a[$ و $]-\infty, +\infty[$ مجالات مفتوحة ، في حين يقال على المجالين $[a, +\infty[$ و $]-\infty, a]$ إنهما مغلقان ، وسندرك سبب ذلك عند دراستنا للفضاءات المترية في الفصل الثالث .

ويجدر بنا الإشارة إلى أن $+\infty$ و $-\infty$ هما مجرد رمزين استخدمناهما للدلالة على المجالات غير المحدودة . ولا يجب بحال من الأحوال اعتبارهما عددين حقيقيين . وسنوسع في بند لاحق المجموعة $\mathbb{R}$ ، بحيث تَضُمُّ هذان الرمزان . وحتى ذلك الحين ،يتوجب اعتبارهذين الرمزين غريبين عن $\mathbb{R}$.

٢.٥٩٢ ــــ نظرية (المجالات المتداخلة)

لتكن $\{I_n\}, n \in N$ متوالية من المجالات المغلقة المحدودة في $\mathbb{R}$ بحيث $I_{n+1} \subseteq I_n$ أياًكان n من N . عندئذ $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

البرهان :

لنفترض $I_n = [a_n, b_n]$. عندئذ ، يكون $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ أياً كان n من N . لتكن $A = \{ a_n : n \in N\}$.من الواضح أن هذه المجموعة غير خالية،وأن كل عنصر b_n أياًكان n من N هو عنصر حاد من الأعلى للمجموعة A . إذن نجد استناداً إلى مسلمة التمام (٢,٥١) وجود حد أعلى لـ A ، أي أن هنالك عدداً حقيقياً x ، بحيث $x = \sup A$ ، ومن الواضح أن $a_n \leq x \leq b_n$. وبالتالي ، فإن $x \in I_n$ أياًكان n من N ، أي أن $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ، وهذا يعني أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.■

هذا ولا تصح النظرية بالضرورة عندما تكون المجالات المتداخلة غير مغلقة أو غير محدودة . وعلى سبيل المثال ، فإن لمتوالية المجالات المفتوحة $\{\,]-\frac{1}{n},0[\,\}$, $n\in N$ تقاطعاً خالياً : $\bigcap_{n=1}^{\infty}\,]-\frac{1}{n},0[\, = \varnothing$ ، كما أن لمتوالية المجالات المغلقة غير المحدودة $\{\,[\frac{n+1}{2},\infty[\,\}$ ، $n\in N$ تقاطعاً خالياً أيضاً .

عند تعريفنا للمجالات غير المحدودة استعملنا الرمزين $+\infty$ و$-\infty$ دون أن نعرفها . وسنقوم الآن بتعريف $+\infty$ و $-\infty$، من خلال ما يسمى بموسَّع مجموعة الأعداد الحقيقية .

٢,٥٩٣ — تعريف (مُوَسَّع $\mathbb{R}$)

لنأخذ شيئين،نرمز لهما بـ $-\infty$ و $+\infty$،ونسميهما نقطتين «مثاليتين» أو «ناقص لا نهاية» و«زائد لا نهاية» على الترتيب، ، ولنشكل المجموعة $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. يعرّف **مُوَسَّع الأعداد الحقيقية** بأنه المجموعة $\mathbb{R}^*$ المزودة بعمليتي جمع وضرب وبعلاقة ترتيب كلي بحيث تتحقق المسلمات الثلاثة عشرة الواردة في (٢,٢١) عندما تكون x,y,z في $\mathbb{R}$ ، وبحيث تتحقق المسلمات الإضافية التالية :

(١) أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن

$$x+(+\infty) = (+\infty)+x = +\infty$$
$$x+(-\infty) = (-\infty)+x = -\infty$$
$$x-(+\infty) = -\infty$$
$$x-(-\infty) = +\infty$$
$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

(٢) أياً كان العدد الحقيقي الموجب x فإن

$x(+\infty) = +\infty$ و $x(-\infty) = -\infty$

(٣) أياً كان العدد الحقيقي السالب x فإن

$x(+\infty) = -\infty$ و $x(-\infty) = +\infty$

(٤)

$$(+\infty)+(+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)+(-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

(٥) أياً كان العدد الحقيقي x فإن $-\infty < x < +\infty$

٢,٥٩٤ — تعريف (الجوارات)

ليكن x_o عدداً حقيقياً. نقول عن كل مجال مفتوح (**محدود أو غير محدود**) يحوي x_o **إنه جَوَار لـ** x_o ، **أو كرة مفتوحة** تحوي x_o . وإذا كان x_o واقعاً في منتصف مجال مفتوح (ومحدود) ، قلنا عن هذا المجال ، إنه كرة مفتوحة **مركزها** x_o . ويسمى كل مجال مفتوح من الشكل $]a,+\infty[$ ، حيث $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ ، **جواراً لـ** $+\infty$ (أو كرة مفتوحة مركزها $+\infty$) . كذلك فكل مجال مفتوح من النمط $]-\infty,a[$ ، حيث $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ يسمى جواراً لـ $-\infty$ (أو كرة مفتوحة مركزها $-\infty$) . وعلى سبيل المثال ، فإن $]0,3[$ و $]-1,5[$ جواران للعدد 1 . كذلك ، فان كلاً من $]-3,+\infty[$ و $]\sqrt{2},+\infty[$ جوار لـ $+\infty$. أما كل من $]-\infty,0[$ و $]-\infty,7[$ فيشكل جواراً لـ $-\infty$. وأخيراً ، فإن $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ يشكل جواراً لأي عدد حقيقي ولـ $-\infty$ ولـ $+\infty$.

نلاحظ أن هنالك خلافاً جوهرياً ، بين جوار العدد الحقيقي x_o وجوار $+\infty$ أو $-\infty$ ، ذلك أن أي جوار للعدد الحقيقي x_o يجب أن يحوي x_o كعنصر منه . أما $+\infty$ فلا ينتمي إلى أي جوار لـ $+\infty$ ، كذلك فلا ينتمي $-\infty$ إلى أي جوار لـ $-\infty$.

وفي الختام نرى تحذير القارىء من الوقوع في شرك اعتبار $+\infty$ أو $-\infty$ عددين حقيقيين . كذلك ، فإن المجموعة الموسّعة $\mathbb{R}^*$ ، التي زودناها بعمليتي الجمع والضرب وبعلاقة الترتيب الكلي ،لا تحقق كل المسلمات الثلاث عشرة ، التي أوردناها في (٢,٢١) ، والتي تحدد البنية الجبرية للأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

تمارين

المسلمات الجبرية للأعداد الحقيقية

(٢ — ١)
إذا كان x,y عددين حقيقيين بحيث $xy=0$ فإن $x=0$ أو $y=0$.

(٢ — ٢)
إذا كان x,y عددين حقيقيين ، بحيث $xy\neq 0$ فإن $x\neq 0$ و $y\neq 0$ ، كما أن $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$.

(٢ — ٣)
إذا كان x,y عددين حقيقيين ، فإن الدعاوى الأربع التالية متكافئة :
$0<y-x$ و $-y<-x$ و $x-y<0$ و $x<y$
برهن كذلك تكافوء الدعاوى هذه ، عندما نستبدل بالعلاقة $>$ العلاقة $\geqslant$.

(٢ — ٤)
إذا كانت x_1, y_1, x_2, y_2 أعداداً حقيقية ، بحيث $x_2<y_2$ و $x_1<y_1$ ،فإن $x_1+x_2<y_1+y_2$. ونعبر عن هذا ، بأنه يمكن جمع متراجحين لهما نفس الإتجاه . بيّن أنه في الحالة العامة ، لا يترتب على $x_2<y_2$ و $x_1<y_1$ أن يكون $x_1-x_2<y_1-y_2$.

(٢ — ٥)
إذا كان x,y عددين حقيقيين ، بحيث $x<y$ ،وكان z عدداً حقيقياً موجباً،فإن $xz<yz$ و $\frac{x}{z}<\frac{y}{z}$. أما إذا كان z عدداً حقيقياً سالباً فإن $xz>yz$ و $\frac{x}{z}>\frac{y}{z}$.

(٢ — ٦)
إذا كان x,y عددين حقيقيين ، بحيث $0<x<y$ ، فإن $0<y^{-1}<x^{-1}$.

(٢ — ٧)
إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً ، فإن الدعاوى التالية متكافئة :
(i) $|x|<a$ ، (ii) $-a<x<a$ ،
(iii) $x<a$ و $-x<a$ ، (iv) $x^2<a^2$.

(٢ — ٨)

إذا كان a,x عددين حقيقيين ، بحيث $a > 0$ ، فإن الدعاوى التالية متكافئة :

(i) $|x| > a$ (ii) $x < -a$ أو $x > a$ ، (iii) $x^2 > a^2$.

(٢ — ٩)

أياً كان العددان الحقيقيان x,y ، فإن $||x| - |y|| < |x \pm y| < |x| + |y|$

(إستخدم لحل هذا التمرين العلاقات التالية بعد إثباتها :

$x^2 + 2|xy| + y^2 = (|x| + |y|)^2 < (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$)

الأعداد الطبيعية والصحيحة والعادية

(٢ — ١٠)

لتكن A مجموعة جزئية من N ، بحيث $1 \in A$ ، وبحيث أنه إذا كان n عدداً طبيعياً ما ، فإن كون $\{m : 1 < m < n\} \subseteq A$ يقتضي أن يكون $n+1 \in A$. برهن أن $A = N$.

(٢ — ١١)

برهن أنه ، أياً كان n من N ، فإن :

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

(iii) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ، قابل للقسمة على 9 .

(iv) $(1+h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$ ، (حيث $h > 0$)

(v) $(1-h)^n < 1 - nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$ ، (حيث $1 > h > 0$)

(٢ — ١٢)

أثبت عدم وجود عدد عادي x ، بحيث $x^2 = 3$. وبوجه عام ، أثبت أنه إذا كان p عدداً طبيعياً أولياً ، فلا وجود لعدد عادي x ، بحيث $x^2 = p$.

(٢ — ١٣)

بيّن أنه إذا كان x عدداً عادياً مغايراً للصفر ، وكان y عدداً غير عادي ، فإن كلاً من $x+y$ و xy عدد غير عادي .

(٢ — ١٤)

لتكن a,b,c,d أعداداً عادية ، و x عدداً غير عادي . بين أن $\frac{ax+b}{cx+d}$ غير عادي في الحالة العامة . متى يحدث استثناء لذلك ؟

(٢ — ١٥)

ليكن a,b عددين طبيعيين . بيّن أن $\sqrt{2}$ يقع دوماً بين العددين $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+2b}{a+b}$. أيّ من هذين أقرب الى $\sqrt{2}$ ؟

(٢ — ١٦)

برهن أنه ، إذا كان x,y عددين صحيحين ، فإن $x+y$ ، و xy عددان صحيحان كذلك .

(٢ — ١٧)

برهن أنه إذا كان x,y عددين صحيحين ، بحيث $x<y$ ، فهنالك عدد طبيعي z بحيث $y=x+z$.

(٢ — ١٨)

برهن أنه إذا كان x,y عددين صحيحين ، بحيث $0<y$ ، فهنالك عدد طبيعي z ، بحيث $x<yz$.

(٢ — ١٩)

ليكن $m \in Z$ ولنفترض أن $Z_m = \{k \in Z : k \geq m\}$ برهن أنه ينتج عن مبدأ الاستقراء الرياضي ما يلي أياً كانت المجموعة الجزئية M من Z_m : إذا كان $m \in M$ ، ونتج من كون $x \in M$ أن $x+1 \in M$ ، فإن $M = Z_m$.

(٢ — ٢٠)

بين أن المجموعة Z_m في التمرين السابق (١٩) مرتبة جيداً .

قابلية العد

(٢ — ٢١)

برهن أن أي مجالين مغلقين غير منحطين $[c,d]$ و $[a,b]$ متكافئان .

(٢ — ٢٢)

بين أن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تكافىء مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$.
(إستخدم الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ المحددة بالدستور $f(x) = \exp x$)

(٢ — ٢٣)

بين أن المجموعة $\mathbb{R}$ تكافىء المجال المفتوح $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
(إستخدم الدالة $f: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ المحددة بالدستور $f(x) = \text{Arctan } x$) .

(٢ — ٢٤)

لتكن $\{A_n\}, n \in N$ متوالية من المجموعات A_n حيث A_n مجموعة قابلة للعد اللامنتهي أياً كان n من N وحيث $A_n \cap A_m = \emptyset$ أياً كان العددان المختلفان n, m من N . برهن أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ مجموعة قابلة للعد اللامنتهي : أثبت أننا نجد النتيجة نفسها ، حتى ولو لم يتحقق الشرط الأخير ، أي لو لم تكن المجموعات A_n منفصلة مثنى .

(٢ — ٢٥)

إذا كان $A_1 \approx B_1$ و $A_2 \approx B_2$ ، وكان $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ و $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ فإن $A_1 \cup A_2 \approx B_1 \cup B_2$.

(٢ — ٢٦)

بين أن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تكافىء المجال $]0,1[$.
(برهن أولاً أن أي مجالين مفتوحين متكافئان ، ثم أفد من التمرين (٢٣)) .

(٢ — ٢٧)

أثبت أن $[0,1] \approx]0,1[$. (استخدم الدالة $f: [0,1] \to]0,1[$ المحددة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & (\text{عندما } x = \frac{1}{2^n} \text{ و } n = 0,1,2,\dots \ ) \\ x & (\text{عندما } x \neq \frac{1}{2^n} \ ) \end{cases}$$

(٢ — ٢٨)

برهن أن الجداء الديكارتي لمجموعتين قابلتين للعد ، هو مجموعة قابلة للعد .

(٢ — ٢٩)

برهن أن مجموعة كل المجموعات الجزئية المنتهية من N ، هي مجموعة قابلة للعد .

الأعداد الحقيقية

(٢ — ٣٠)

أوجد الحد الأعلى والحد الأدنى لكل من المجموعات الجزئية التالية في $\mathbb{R}$:

$\{x : -1 < x \leq 3\}$ و $\{x : -1 \leq x \leq 3\}$ و $\{x : -1 < x < 3\}$

$\{x : x < 5\}$ و $\{x : x^2 < 5\}$ و $\{x : x^2 > 5\}$ و $\{x : -1 \leq x < 3\}$

(٢ — ٣١)

بين أنه لا يمكن أن يوجد لمجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ أكثر من حد أعلى **واحد وحد أدنى واحد** .

(٢ — ٣٢)

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $b = \sup A$ هو أن يكون b عنصراً حاداً من الأعلى لـ A وأن يقابل كل عدد موجب ε عنصر a من A ، بحيث يكون $b - \varepsilon < a \leq b$.

توصل إلى صياغة مماثلة للحد الأدنى ، وأوجد خاصة مميزة مماثلة له .

(٢ — ٣٣)

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة ، وليكن $B \subseteq A$ و $B \neq \varnothing$. أثبت أن :

$$\sup A \leq \sup B \quad , \quad \inf B \leq \inf A$$

(٢ — ٣٤)

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. أوجد الشروط اللازمة والكافية كي يكون $\sup A = \inf A$

(٢ — ٣٥)

لتكن A,B مجموعتين جزئيتين محدودتين في $\mathbb{R}$. برهن أن

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

(٢ — ٣٦)

برهن أنه ، إذا كانت S مجموعة من الأعداد الصحيحة ، وكان $\sup S$ موجوداً ، فإن $\sup S \in Z$.

(أفد من التمرين رقم (٣١)) .

(٢ — ٣٧)

أثبت وجود مجموعة لا منتهية من الأعداد العادية ، ومجموعة لا منتهية أخرى من الأعداد غير العادية ، بين العددين الحقيقيين a,b ، حيث $a < b$.

(٢ — ٣٨)

برهن أن مجموعة الأعداد غير العادية كثيفة في مجموعة الأعداد العادية بالطريقة التالية : إذا كان γ, s عددين عاديين ، بحيث $\gamma < s$ ، فإن العدد غير العادي $x = \gamma + (\sqrt{2}-1)(s-\gamma)$ محصور بينهما .

(٢ — ٣٩)

بين أن نظرية أرخميدس (٢,٥٣) تكافيء الدعوى التالية : أياً كان العددان الحقيقيان الموجبان x,y ، فثمة عدد طبيعي n ، بحيث يكون $x < ny$.

(٢ — ٤٠)

برهن أنه إذا كان x,y عددين حقيقيين موجبين ، فثمة عدد طبيعي n ، بحيث يكون

$$(n-1)y \leq x < ny .$$

(خذ المجموعة $\{m \in N : x < ym\}$. طبق (٣٩) لتضمن عدم خلو هذه المجموعة ، ثم أفد من الترتيب الجيد لأي مجموعة جزئية من N (٢,٣٩٥)) .

(٢ — ٤١)

برهن أنه إذا كان x عدداً حقيقياً ما ، فهنالك عدد صحيح n بحيث ، $n-1 \leq x < n$. (من الممكن الإفادة من نظرية أرخميدس (٢,٥٣) ومن نظرية الترتيب الجيد (٢,٣٩٥) . ويمكن الحصول على الجواب بصورة أسرع باستخدام المسألة (٣٩) ، مع ملاحظة أن n كان هنالك عدداً طبيعياً في حين أنه هنا عدد صحيح .)

(٢ — ٤٢)

ليكن a عدداً حقيقياً و I مجموعة غير خالية محتواة في المجال $]a, +\infty[$ تحقق الخاصة التالية : «إذا كان $y \in I$ و $a < x < y$ فإن $x \in I$ » . برهن أن I عندئذ هو إما المجال $]a, +\infty[$ ، أو واحد من المجالين $]a,b[$ و $]a,b]$ ، حيث $a < b$.

(لا بد لحل هذه المسألة ، من تطبيق مسلمة تمام $\mathbb{R}$ (٢,٥١) .)

(٢ — ٤٣)

برهن على أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة ما I مجالاً (محدوداً أو غير محدود أو منحطاً) هو أن تتمتع I بالخاصة التالية : «إذا كان y_2 و y_1 عنصرين من I، وكان x عنصراً يحقق الشرط $y_1 < x < y_2$ ، فإن $x \in I$. (أفد من المسألة السابقة (٤١)) .

(٢ — ٤٤)

استنتج من المسألة السابقة (٤٢) أن تقاطع أي جماعة غير خالية من المجالات لابد وأن يكون مجالاً (قد يكون منحطاً) .

(٢ — ٤٥)

أثبت صحة متراجحة مينكوفسكي (Minkowski) التالية :

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]^{1/2}$$

حيث $b_1,\ldots,b_n$ و $a_1,\ldots,a_n$ أعداد حقيقية غير سالبة .

(من الممكن الإفادة من متراجحة كوشي — بونيكوفسكي (٣،١٤) .)

(٢ — ٤٦)

أورد برهاناً على نظرية ديديكند (Dedekind) ، التي يُنص عليها كما يلي :

لتكن A,B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ تحققان الشروط الثلاثة التالية :

(i) $A \cup B = \mathbb{R}$

(ii) $A \neq \varnothing \neq B$

(iii) إذا كان $a \in A$ و $b \in B$ فإن $a < b$.

عندئذ ، هنالك عدد حقيقي α ، بحيث أنه إذا كان $x > \alpha$ فإن $x \in B$ ، وإذا كان $x < \alpha$ فإن $x \in A$.



الفصل الثالث

توبولوجيا الفضاءات المترية

Topology of Metric Spaces

عندما كان **كانتور** « Cantor » في معرض تقصّي خواص المجموعات الجزئية من الفضاءات الإقليدية ، رأى ضرورة إيراد مفهومٍ للمسافة بين نقاط كلٍّ من هذه الفضاءات . وقد التزم بأفكار كانتور وطورها عدد من أبرز رياضيي المدرسة الإيطالية في ذلك الحين . يأتي في مقدمتهم **اسكولي** « Ascoli » **وفولتيرا** « Volterra » **وآرزيلا** « Arzela » . وقد توج هذه الجهود الرياضي الفرنسي **فريشيه** « Fréchet » . حين توصل من خلال أطروحته للحصول على درجة الدكتوراة عام ١٩٠٦ م إلى ما يسمى اليوم بالفضاء المتري . وما الفضاء المتري إلا مجموعة عناصرها كيفية (قد تكون نقاطاً أو منحنياتٍ أو دوالَّ أو مصفوفاتٍ أو متتالياتٍ الخ ...) . وهذه المجموعة مزودة بمفهومٍ للمسافة بين عناصرها ملائمٍ لدراسة تقارب المتتاليات فيها واستمرار الدوالّ المعرَّفةِ عليها .

٣,١ — الفضاءات المترية والفضاءات المنظّمة

Metric and Normed Spaces

٣,١١ — تعريف

لتكن X مجموعة ما ، ولتكن D دالة حقيقية معرفة على $X \times X$ تحقق الشروط التالية :

(١) أياً كان العنصران x,y من X ، فإن $D(x,y) \geqslant 0$.

(٢) الشرط اللازم والكافي كي يكون $D(x,y)=0$ هو أن يكون $x=y$.

(٣) أياً كان العنصران x,y من X ، فإن $D(x,y)=D(y,x)$. (خاصة التناظر) .

(٤) أياً كانت العناصر x,y,z من X ، فإن $D(x,y)+D(y,z) \geqslant D(x,z)$. (متراجحة المثلث)

عندئذ يقال إن D **مترك أو دالة مسافة على** X ، كما يقال عن الثنائية المؤلفة من المجموعة X ومن المترك D إنها **فضاء متري** ، وسنرمز له بـ (X,D) .

٣,١٢ — مثال

لتكن X مجموعة ما . ولنعرف الدالة $D: X\times X \to R$ على النحو التالي :

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & (\text{عندما } x=y) \\ 1 & (\text{عندما } x\neq y) \end{cases}$$

يمكن التحقق بسهولة من إن D متري على X . **يسمى** D **بالمتري المنقطع** . ويطلق على الفضاء المتري (X,D) في هذه الحالة اسم **الفضاء المنقطع** أو **فضاء النقاط المنعزلة** .

٣,١٣ — مثال

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية . ولنعرف الدالة $D: R\times R \to R$ بالدستور $D(x,y) = |x-y|$. من السهل التحقق بأن D تشكل متريّاً على R . يسمى هذا المتري **متري القيمة المطلقة** أو **المتري المألوف** ، ويدعى الفضاء المؤلف من المجموعة R المزودة بالمتري المألوف **الفضاء الحقيقي المألوف** . وسنرمز له بـ $\mathbb{R}$.

٣,١٤ — مثال

لنأخذ المجموعة R^n ، أي مجموعة المرتبات n من الأعداد الحقيقية . حيث n عدد صحيح موجب . لنعرف الدالة $D: R^n \times R^n \to R$ بالدستور $D(x,y) = [\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ ، حيث

$$x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad \text{و} \quad y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

من الواضح أن D تحقق شروط المتري الثلاثة الأولى . ولإثبات أن D تحقق الشرط الأخير (متراجحة المثلث) . **ينبغي** أن نلاحظ مسبقاً أنه إذا كانت لدينا الأعداد $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ فإن

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_ia_jb_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2$$

ويترتب على هذه المتراجحة أن $(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

وبجذر الطرفين نجد المتراجحة المسماة التالية **بمتراجحة كوشي — بونيكوفسكي** :

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leqslant [\sum_{i=1}^{n} a_i^2]^{\frac{1}{2}} \; [\sum_{i=1}^{n} b_i^2]^{\frac{1}{2}}$$

وهكذا . فإذا كانت $z = (z_1, \ldots, z_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ و $x = (x_1, \ldots, x_n)$
أية ثلاثة عناصر من R^n فإن

$$[\ D(x,y) + D(y,z)\ ]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 + 2\ [\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 . \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = D^2(x,z)$$

وبالتالي . فإن $D(x,y) + D(y,z) \geqslant D(x,z)$.

يسمى هذا المترك **بالمترك المألوف** (أو **المترك الإقليدي**) على R^n . كما يسمى الفضاء المشكل من R^n المزودة بالمترك المألوف على R^n **بالفضاء الإقليدي ذي الأبعاد** n . وسنرمز له بـ $\mathbb{R}^n$.

٣,١٥ — مثال

لتكن X مجموعة المتواليات الحقيقية المحدودة . لنعرف المترك D على هذه المجموعة على النحو التالي : أياً كانت المتواليتان الحقيقيتان المحدودتان $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ فإن $D(x,y) = \sup\{\,|x_n - y_n| : n \in N\}$. سنبين أن D مترك على X .

نلاحظ أولاً أنه لما كانت المتواليتان محدودتين . فإن $|y_n| \leqslant b$ و $|x_n| \leqslant a$ أياً كان العدد الصحيح الموجب n . إذن أياً كان n من N فإن $0 \leqslant |x_n - y_n| \leqslant a + b$. وهذا يعني أن المجموعة $\{\,|x_n - y_n| : n \in N\}$ محدودة . وأن

$0 < \sup\{ |x_n - y_n| : n\in N\}$ ، وبالتالي ، فإن D هي دالة معرفة على $X\times X$. وتأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة . نلاحظ بعد ذلك أنه أياً كانت المتواليتان x,y من X، فإنه أياً كان n من N نجد

$$0 \leq |x_n - y_n| \leq \sup\{ |x_n - y_n| : n\in N\} = D(x,y)$$

ويترتب على هذا ، أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $D(x,y)=0$ ، هو أن يكون $|x_n - y_n| = 0$ أياً كان n من N . أي أن يكون $x_n = y_n$ أياً كان n من N . وهذا يعني أن $\{x_n\} = \{y_n\}$ أو $x=y$.

أما خاصة التناظر الثالثة فناتجة عن المساواة الواضحة

$$\{ |x_n - y_n| : n\in N\} = \{ |y_n - x_n| : n\in N\}$$

التي يترتب عليها أن $D(x,y) = D(y,x)$.

لنفترض أخيراً ، $z = \{z_n\}$ و $y = \{y_n\}$ و $x = \{x_n\}$ أي ثلاث متواليات في X . نرى أنه أياً كان n من N . فإن $D(x,y) + D(y,z) \geq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \geq |x_n - z_n|$ إذن

$$D(x,y) + D(y,z) \geq \sup\{ |x_n - z_n| : n\in N\} = D(x,z).$$

٣,١٦ — مثال

لتكن B(X) مجموعة كل الدوال الحقيقية المحدودة على X . أي أنه إذا كان $f\in B(X)$. فإن f دالة معرفة على X ، وتأخذ قيمتها في $\mathbb{R}$، بحيث أنه أياً كان x من X فإن $|f(x)| \leq a$. بفرض a عدداً حقيقياً . لنعرف متركاً ϱ على B(X) كما يلي : أياً كانت الدالتان f,g من B(X) فإن

$$\varrho(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| : x\in X\}$$

إن التحقق من أن ϱ متركٌ على B(X) يتم بصورة مماثلة للطريقة المتبعة في المثال السابق ، لذا نترك هذا الأمر للقارىء . ويدعى هذا المترك **بالمترك المنتظم** على B(X)

٣,١٧ — مثال (الفضاءات الجزئية من فضاء متري)

ليكن (X,D) فضاء مترياً و A مجموعة جزئية غير خالية من X . فإذا كان x,y عنصرين في A . فإن D(x,y) هي المسافة بين x,y في الفضاء المتري (X,D) . ومن الواضح أن D تولد مفهوماً للمسافة بين نقاط A . بيد أن D (في الحالة $A\neq X$) ليست متركاً على A . ذلك أن المترك على A ينبغي أن يكون دالة معرفة على $A\times A$ ، في حين أن D دالة معرفة على $X\times X$. ورغم هذا فن الممكن تلافي هذا النقص وذلك بأن نفترض D_A مقصور D على $A\times A$. ومن السهل بعد ذلك ، التحقق من أن D_A هو مترك على A . يسمى D_A **المترك النسبي** على A الناتج من D ، أو **مترك الفضاء الجزئي** على A ، كما يدعى الفضاء المتري (A,D_A) **الفضاء الجزئي** من (X,D) المولد بالمجموعة A .

٣,١٨ — مثال (الفضاءات الخطية المنظّمة)

ليكن X فضاء خطياً حقيقياً. نعرف **النظيم** على X على أنه دالة $\|\ \|$، ساحتها X ومداها في $\mathbf{R}$، تحقق الشروط التالية (حيث نرمز الى خيال x وفق هذه الدالة بـ $\|x\|$) :

(١) أياً كان x من X، فإن $\|x\| \geq 0$.

(٢) الشرط اللازم والكافي كي يكون $\|x\| = 0$، هو أن يكون $x=0$.

(٣) أياً كان x من X. وأياً كان العدد الحقيقي a، فإن $\|ax\| = |a|\|x\|$.

(٤) أياً كان العنصران x,y من X. فإن $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ليكن $\|\ \|$ نظيماً على فضاء خطي حقيقي. ولنعرف دالة حقيقية D ساحتها $X \times X$ كما يلي :

$$D(x,y) = \|x-y\|$$

من الواضح أنه أياً كان x,y من X، فإن $D(x,y) \geq 0$ استناداً الى (١)، كما أننا نجد اعتماداً على (٢) أن :

$$D(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

كذلك نجد استناداً إلى (٣) أن

$$D(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\ \|y-x\| = \|y-x\| = D(y,x)$$

وإذا لاحظنا أخيراً بالاعتماد على (٤) أن :

$$D(x,y) + D(y,z) = \|x-y\| + \|y-z\| \geq \|(x-y)+(y-z)\| = \|x-z\| = D(x,z)$$

استنتجنا أن D مترك على X .

يعرف **الفضاء الخطي المنظّم** على أنه فضاء متري (X,D)، حيث X فضاء خطي حقيقي. وحيث D هو المترك على X المعرف بالدستور $D(x,y) = \|x-y\|$. ومن السهل أن نلاحظ بأن المجموعات الواردة في الأمثلة ٣.١٣ و٣,١٤ و٣.١٥ و ٣,١٦ تشكل فضاءات خطية بالنسبة للعمليات الجبرية **المألوفة**. وأن كلاً من الدوال D يمكن أن ينتج عن نظيم.

فالنظيم في المثال ٣.١٣ هو $\|x\| = |x|$.

وفي المثال ٣.١٤ هو $\|x\| = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{\frac{1}{2}}$.

وفي المثال ٣.١٥ هو $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in N\}$.

وأخيراً فالنظيم في المثال ٣.١٦ هو $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. ويدعى **النظيم المنتظم** على X .

٣,١٩ ــ ملاحظة

ينبغي أن ندرك بأنه يمكن تزويد مجموعة ما X بأكثر من مترك واحد . فمثلاً ، يمكن تزويد المجموعة R بالمترك $D'(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ ، فضلاً عن المترك $D(x,y) = |x-y|$. كذلك فمن الممكن تزويد المجموعة R^n بكلٍّ من المتركين التاليين :

$$D_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad , \quad D_2(x,y) = \max\{ |x_1 - y_1| , |x_2 - y_2| , \ldots , |x_n - y_n| \}$$

وكمترك آخر على مجموعة المتواليات الواردة في المثال ٣,١٥ نورد المترك

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1+|x_n - y_n|)}$$

ونترك مسألة التحقق من أن D', D_1, D_2, d هي فعلاً متارك على المجموعات الموافقة كتمرين للقارىء .

٣,١٩١ ــ ملاحظة

وجدنا أن كل نظيم على فضاء خطي يولد متركاً . ونود أن نشير الى أن العكس غير صحيح بعامة . وعلى سبيل المثال . فلا يمكن أن ينتج المترك D' الوارد في الملاحظة السابقة عن نظيم على R . وفي الحقيقة . فلو افترضنا ، أن D' مولّد من نظيم ما،لكان $D'(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| D'(x,y)$. أياً كانت الأعداد الحقيقية x, y, α . إلاّ أن هذا غير صحيح لأن :

$$D'(\alpha x, \alpha y) = \frac{|\alpha x - \alpha y|}{1+|\alpha x - \alpha y|} = \frac{|\alpha| \, |x-y|}{1+|\alpha| \, |x-y|} \neq |\alpha| \, D'(x,y)$$

٣.٢ — المجموعات المفتوحة
Open Sets

لتعريف المجموعة المفتوحة في فضاء متري (X,D)، لا بد لنا من البدء بتعريف الكرة المفتوحة كما يلي :

٣.٢١ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً . وليكن x عنصراً ما من X و ε عدداً موجباً ما . يطلق اسم **الكرة المفتوحة التي . مركزها** x **ونصف قطرها** ε (بالنسبة للمترك D) على المجموعة :

$$N_D(x,\varepsilon) = \{y \in X : D(x,y) < \varepsilon\}$$

وإذا لم يكن معرفاً على X مترك آخر غير D . فمن الممكن إسقاط الدليل D . والاكتفاء بالرمز . $N(x,\varepsilon)$. نلاحظ أن الكرة المفتوحة $N(x,\varepsilon)$ لا يمكن أن تكون خالية لاحتوائها على العنصر x .

هذا وتسمى المجموعة $N(x,\varepsilon) - \{x\}$ **كرة مفتوحة محذوفة المركز**،ويرمز لها بـ $N'(x,\varepsilon)$.

٣,٢٢ — مثال

لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$. وليكن $a \in \mathbb{R}$. من السهل التحقق بأن $N(a,\varepsilon)$ في هذه الحال هي المجال المفتوح $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

٣,٢٣ — مثال

ليكن (X,D) الفضاء المنقطع (٣.١٤) . إن الكرة المفتوحة . التي مركزها x ونصف قطرها 1، هي المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$. في حين أن الكرة المفتوحة التى مركزها x ونصف قطرها 2 هي المجموعة X بأكملها .

٣,٢٤ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً . ولتكن U مجموعة جزئية من X . نقول إن U **مجموعة مفتوحة في** (X,D) . أو اختصاراً في X . إذا وُجد لكل عنصر x من U كرة مفتوحة مركزها x محتواة في U .

٣,٢٥ — مثال

لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$. إن أي مجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ من $\mathbb{R}$ ليست مفتوحة،لأن أي

مجال مفتوح مركزه a يحوي نقاطاً مختلفة عن a ، وذلك يعني أنه أياً كان العدد الموجب ε فإن $N(a,\varepsilon) \not\subseteq \{a\}$. كذلك ، فإن المجموعة $[a,b[$ غير مفتوحة ، ذلك أن أي مجال مفتوح متمركز في a يتجاوز هذه المجموعة،لأنه يحوي أعداداً أصغر من a . أما المجموعة $]a,b[$ ، فمن السهل التحقق بأنها مفتوحة في هذا الفضاء .

٣,٢٦ — نظرية

المجموعة الخالية $\varnothing$ والمجموعة الكلية X مفتوحتان في أي فضاء متري (X,D).

البرهان

لو افترضنا $\varnothing$ مجموعة غير مفتوحة ، لوجد عنصر x فيها،بحيث أن أي كرة مفتوحة مركزها x لا يمكن أن تكون محتواة في $\varnothing$. ولما كان هذا يعني أن $\varnothing$ غير خالية ، فإن افتراضنا غير صحيح ، أي أن $\varnothing$ مفتوحة . أما كون المجموعة الكلية X مفتوحة ، فأمر ناتج من أن أي كرة مفتوحة مركزها أي نقطة في X محتواة في X ■

٣,٢٧ — نظرية

إن كل كرة مفتوحة $N(x,\varepsilon)$ في أي فضاء متري (X,D) هي مجموعة مفتوحة .

البرهان

لتكن y نقطة ما من $N(x,\varepsilon)$. إن إثبات النظرية يتم إذا ما تمكنا من إيجاد كرة مفتوحة مركزها y محتواة في $N(x,\varepsilon)$.

لما كان $D(x,y) < \varepsilon$ ، فإن $\varepsilon' = \varepsilon - D(x,y) > 0$. سنبين الآن أن الكرة $N(y,\varepsilon')$ تحقق المطلوب ، أي أن $N(y,\varepsilon') \subseteq N(x,\varepsilon)$. لنفترض z عنصراً ما من $N(y,\varepsilon')$. عندئذ $D(y,z) < \varepsilon' = \varepsilon - D(x,y)$،أو $D(x,y) + D(y,z) < \varepsilon$. واستناداً إلى متراجحة المثلث في تعريفنا للمترك،نستنتج أن $D(x,z) < \varepsilon$. أي أن $z \in N(x,\varepsilon)$. وبالتالي ، فان $N(y,\varepsilon') \subseteq N(x,\varepsilon)$. ■

تبرر لنا هذه النظرية تسمية المجموعة $N(x,\varepsilon)$ بالكرة « المفتوحة » .

٣,٢٨ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً . عندئذ :

(١) اجتماع أي جماعة من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة .

(٢) تقاطع أي جماعة **منتهية** من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة .

البرهان

(١) لتكن $\{U_i\}, i\in I$ أي جماعة من المجموعات المفتوحة في (X,D) ، ولنثبت أن المجموعة $U = \cup_i U_i$ مفتوحة . إذا كانت الجماعة خالية ، فإن U خالية كذلك ، وبالتالي مفتوحة (٣،٢٦) . أما إذا لم تكن الجماعة $\{U_i\}$ خالية ، بل كانت جميع عناصر الجماعة مجموعات خالية ، فمن الواضح أن U خالية كذلك ، وبالتالي مفتوحة . لنفترض الآن أن الجماعة غير خالية ، وأن في عداد عناصرها مجموعات غير خالية ، وليكن x عنصراً ما من U . عندئذ ، هنالك عنصر ما i من I بحيث $x\in U_i$. ولما كانت U_i مفتوحة ، فهنالك عدد موجب ε بحيث $N(x,\varepsilon)\subseteq U_i$. ويترتب على هذا أن $N(x,\varepsilon)\subseteq U$. أي أن U مجموعة مفتوحة .

(٢) لتكن لدينا الآن جماعة منتهية من المجموعات المفتوحة في (X,D) . ولنثبت أن التقاطع U لهذه الجماعة هو مجموعة مفتوحة . فإذا كانت الجماعة خالية ، فإن $U=X$ ، وبالتالي تكون U مفتوحة (٣،٢٦) . أما إذا لم تكن الجماعة خالية ، وكانت المجموعة U خالية ، فإن U مفتوحة . لنفترض الآن أن الجماعة غير خالية ولتكن $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ ، وأن U غير خالية،وليكن x عنصراً من U . عندئذ $x\in U_1,U_2,\ldots,U_n$. ولما كان كلٌ من هذه المجموعات $U_1,U_2,\ldots,U_n$ مفتوحاً ، فهنالك أعداد موجبة $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ بحيث $N(x,\varepsilon_i)\subseteq U_i$ أيا كان i من 1 حتى n . فإذا افترضنا ε أصغر الأعداد ε_i ، فإن $N(x,\varepsilon)\subseteq N(x,\varepsilon_i)$ أياً كان i . وبالتالي ، فإن $N(x,\varepsilon)\subseteq U_i$ أياً كان i $(i = 1,2,\ldots,n)$. أي أن $N(x,\varepsilon)\subseteq U$. وهذا يعني أن U مجموعة مفتوحة .■

٣،٢٩ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً و U مجموعة جزئية من X . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون U مفتوحة هو أن تكون اجتماعاً لجماعة من الكرات المفتوحة .

البرهان

لنفترض أولاً أن U مفتوحة . ولنثبت أنها اجتماع لكرات مفتوحة . فإذا كانت U خالية ، فإنها اجتماع للجماعة الخالية من الكرات المفتوحة . أما إذا كانت U غير خالية ، فإن لكل عنصر x فيها كرة مفتوحة $N(x,\varepsilon_x)$ ، بحيث $N(x,\varepsilon_x)\subseteq U$. وبالتالي ، فإن $\cup_U N(x,\varepsilon_x)\subseteq U$. كذلك فقد قلنا إنه إذا كان $x\in U$ ، فإنه عنصر من الكرة المفتوحة $N(x,\varepsilon_x)$. إذن فأيا كان العنصر x من U ،فإن x ينتمي الى $\cup_U N(x,\varepsilon_x)$. لذا فإن $U\subseteq \cup_U N(x,\varepsilon_x)$. وهكذا فإن $U = \cup_U N(x,\varepsilon_x)$. وبالعكس . لنفترض المجموعة U اجتماعاً لجماعة E من الكرات المفتوحة . ولنبين أن U مفتوحة . فإذا كانت E خالية ، فإن U خالية كذلك ، وبالتالي مفتوحة . لنفترض الآن E غير خالية . لما كانت كل كرة مفتوحة مجموعة مفتوحة (٣،٢٧) ، فإن U اجتماع لجماعة من المجموعات المفتوحة ، وبالتالي ، فإن U مجموعة مفتوحة (٣،٢٨) .■

٣,٢٩١ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً و x عنصراً من X . تسمى كل مجموعة مفتوحة تحوي x **جواراً للعنصر** x . وهكذا ، فإن كل مجموعة مفتوحة في (X,D) هي جوار لكل من نقاطها .

٣,٢٩٢ — نتيجة

نستخلص من التعريف السابق ومن التعريف (٣,٢٤)،أنه إذا كانت المجموعة U جواراً لعنصر x ، فلا بد من وجود كرة مفتوحة مركزها x محتواة في U. وبالعكس ، فإذا كانت U مجموعة بحيث أن كل نقطة منهامركز كرة مفتوحة محتواة في U ، فإن المجموعة U جوار لكل من نقاطها .

عرفنا في ٣,١٧ الفضاءات الجزئية من فضاء متري ، وقد رأينا أنه إذا كان (X,D) فضاءً مترياً،وكانت Y مجموعة جزئية غير خالية من X ، فإن الفضاء المتري (X,D) يختلف عن الفضاء المتري (Y,D_1) ، الذي أسميناه فضاء جزئياً من (X,D) . وبوجه خاص ، فليس ضرورياً أن تكون المجموعة المفتوحة في (Y,D_Y) مفتوحة في (X,D) . إلا أن الرابطة بين المترك النسبي D_Y والمترك الأصلي D توحي بوجود علاقة ما بين المجموعات المفتوحة في كل من هذين الفضاءين ، الأمر الذي تعبر عنه النظرية التالية .

٣,٢٩٣ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، ولتكن Y مجموعة جزئية غير خالية من X . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعةٌ جزئيةٌ A من Y مفتوحةً في (Y,D_Y) ، هو أن توجد مجموعة U مفتوحة في (X,D) ، بحيث يكون $A = Y \cap U$.

البرهان

لنفترض أولاً أن المجموعة A مفتوحة في Y . عندئذ نجد أنه أياً كان a من A ، فهنالك عدد موجب ε_a بحيث $\{y \in Y : D(y,a) < \varepsilon_a\} \subseteq A$. من السهل التحقق عندئذ من أن $A = \bigcup_{a \in A} \{y \in Y : D(y,a) < \varepsilon_a\}$.

لنورد الآن المجموعة $U = \bigcup_{a \in A} \{x \in X : D(x,a) < \varepsilon_a\}$. لما كانت U اجتماعاً لجماعة من الكرات المفتوحة في X ، فإن U مفتوحة في X . ونلاحظ عندئذ أن :

$$Y \cap U = \bigcup_{a \in A} \{y \in Y : D(y,a) < \varepsilon_a\} = E$$

وبالعكس ، لنفترض أن $A = Y \cap U$ ، حيث U مجموعة مفتوحة في X ، وليكن a عنصراً من A . عندئذ $a \in U$ ؛ ولما كانت U مفتوحة في X ، فيوجد عدد موجب ε بحيث $\{y \in Y : D(y,a) < \varepsilon\} \subseteq U$. وبالتالي ، فان :

$$\{y \in Y : D(y,a) < \varepsilon\} = Y \cap \{x \in X : D(x,a) < \varepsilon\} \subseteq Y \cap U = A$$

وهذا يعني أن A مفتوحة في Y . ■

٣,٣ — المجموعات المغلقة
Closed Sets

٣,٣١ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً و A مجموعة جزئية من X . نقول عن x من X إنها **نقطة حدية** لـ A إذا تقاطع أي جوار للنقطة x مع A، في نقطة (واحدة على الأقل) مغايرة لـ x . ويطلق على مجموعة كل النقاط الحدية لـ A اسم **المجموعة المشتقة** للمجموعة A، ويرمز لها بـ $D(A)$

ونترك للقارىء البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة حدية لـ A هو أن تقاطع كلّ كرة مفتوحة مركزها x المجموعة A في نقطة مغايرة لـ x .

٣,٣٢ — مثال :

لنأخذ الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$. ولنختر فيه المجموعة $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. إن العدد صفر يمثل النقطة الحدية الوحيدة لـ A . أي أن $D(A) = \{0\}$. ومن السهل . أن نرى بأنه إذا كانت $B =]0,1]$. فإن $D(B) = [0,1]$. هذا . ولا يوجد لمجموعة الأعداد الصحيحة Z أي نقطة حدية ($D(Z) = \emptyset$) . في حين يشكل أي عدد حقيقي نقطة حدية لمجموعة الأعداد العادية Q . أي أن $D(Q) = R$.

٣,٣٣ — مثال :

لنأخذ فضاء النقاط المنعزلة (٣.١٢) . ولتكن U أي مجموعة جزئية منه . لما كان $N(x,1) = \{x\}$ ، أياً كان العنصر x من هذا الفضاء . فإننا نستنتج أنه يمكن إيجاد جوار لأي عنصر x من هذا الفضاء لا يحوي سوى العنصر x نفسه . وبالتالي . فإن المجموعة المشتقة للمجموعة U هي $\emptyset$.

٣,٣٤ — تعريف :

ليكن (X,D) فضاء مترياً . ولْتكن F مجموعة جزئية من X . نقول عن F إنها **مجموعة مغلقة** (بالنسبة للمترك D) إذا حوت F جميع نقاطها الحدية . أي إذا كان $D(F) \subseteq F$

٣,٣٥ — مثال :

إن المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$. والواردة في المثال (٣.٣٢)، غير مغلقة باستثناء Z . ومن الواضح أن المجال $[a,b]$ مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$. وهذا سبب تسميته بالمجال «المغلق» .

٣,٣٦ ــــ مثال

المجموعة $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ مغلقة في الفضاء $\mathbb{R}^2$. لاحظ أنه إذا استعضنا هنا عن علاقة التراجح أو التساوي $\leq$ بعلاقة التراجح $>$ أو $<$ ، فإن A تنقلب إلى مجموعة مفتوحة .

٣,٣٧ ــــ مثال

أي مجموعة جزئية من فضاء النقاط المنعزلة مغلقة .

٣,٣٨ ــــ ملاحظة

يجدر بنا تنبيه القارىء إلى أن كلمتي «مغلقة» و«مفتوحة» لا تنفي إحداهما الأخرى،كما يحدث في بعض الأمور المتعلقة بحياتنا اليومية . فالنافذة المغلقة لا يمكن أن تكون مفتوحة في الوقت نفسه ، والمفتوحة لا يمكن أن تكون مغلقة في آن واحد . وليس الأمركذلك في المجموعات . فإذاكان x عنصراً من فضاء النقاط المنعزلة ، فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة ومغلقة في آن واحد . كذلك ، فإن المجال $]a,b[$ في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$ ليس مفتوحاً ولا مغلقاً في هذا الفضاء .

٣,٣٩ ــــ ملاحظة

تجدر بنا الإشارة بأن كون المجموعة الجزئية من فضاء متري (X,D) مغلقة أو مفتوحة أمر تابع للبنية المترية ، التي زودنا بها X . فإذا تغير المترك ، تتغير بوجه عام المجموعات المغلقة والمفتوحة . لنأخذ مثلاً المجموعة R . فإذا زودنا R بالمترك المنقطع (٣,١٢) ، فإن المثال (٣,٢٧) يبين بأن أي مجموعة جزئية من R مغلقة ، وبوجه خاص، فإن المجال $]a,b]$ مغلق في هذا الفضاء المنقطع . أما لو زودنا R بمترك القيمة المطلقة (٣,١٣) ، فمن الواضح أن المجال $]a,b]$ يغدو غير مغلق في $\mathbb{R}$.

٣,٣٩١ ــــ نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً و F مجموعة جزئية من X . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون F مغلقة ، هو أن تكون متممتها $X-F$ مفتوحة .

البرهان

لنفترض F مغلقة ، ولنثبت أن $X-F$ مفتوحة . إذا كانت $X-F$ خالية،فإن $X-F$ مفتوحة (٣,٢٦) . لتكن $X-F$ غير خالية وليكن xعنصراً ما من $X-F$. لما كانت F مغلقة و x خارجة عن F ، فلا يمكن أن تكون x نقطة حدية لـ F . وبما أن x خارجة عن F ، وليست نقطة حدية لـ F ، فهنالك كرة مفتوحة $N(x,\varepsilon)$ منفصلة عن F . وهكذا ، فقد وجدنا أنه إذا كانت x أي نقطة من $X-F$ ، فهنالك كرة مفتوحة مركزها x محتواة بأكملها في $X-F$. وبالتالي ، فإن $X-F$ مفتوحة .

وبالعكس ، لنفرض $X-F$ مفتوحة ، ولنثبت أن F مغلقة . لنفرض جدلاً أن F غير مغلقة . عندئذ توجد نقطة حدية x_0 لـ F غير منتمية إلى F ، أي منتمية إلى $X-F$. ولكن هذا لا يمكن أن يتم . لأنه لما كانت $X-F$ مفتوحة و x_0 نقطة من $X-F$ ، فهنالك كرة مفتوحة $N(x,\varepsilon)$ منفصلة عن F . الأمر الذي يترتب عليه أن x_0 لا يمكن أن تكون نقطة حدية لـ F . ■

٣.٣٩٢ — نتيجة

لما كان $F=X-(X-F)$ فإنه يترتب على النظرية (٣.٣٩١) أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية U من فضاء متري مفتوحة في هذا الفضاء ، هو أن تكون متممتها مغلقة .

٣.٣٩٣ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً . عندئذ تصح الدعاوى التالية :

(١) المجموعة الخالية $\varnothing$ والمجموعة الكلية X مغلقتان .

(٢) تقاطع أي جماعة من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة .

(٣) اجتماع أي جماعة منتهية من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة .

البرهان

(١) لما كان $X-X=\varnothing$ ، وكانت X مجموعة مفتوحة ، فإن $\varnothing$ مغلقة (٣.٣٩٢) . كذلك ، لما كان $X=X-\varnothing$ ، وكانت $\varnothing$ مفتوحة ، فإن X مغلقة (٣.٣٩٢) .
يترتب على هذا ، وعلى النظرية (٣.٢٦) أنه أياً كان الفضاء المتري (X,D) ، فإن المجموعتين X و $\varnothing$ مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد .

(٢) لتكن $\{F_i\}, i\in I$ أي جماعة من المجموعات المغلقة في (X,D) . ولنبرهن أن المجموعة $F=\bigcap_i F_i$ مغلقة . فإذا كانت الجماعة المفروضة خالية ، فإن $F=X$ ، وبالتالي ، نستنتج استناداً إلى الشق الأول من هذه النظرية أن F مغلقة . أما إذا لم تكن الجماعة المفروضة خالية ، فأياً كان i من I ، هنالك مجموعة مفتوحة U_i بحيث $F_i=X-U_i$. ويترتب على هذا أن

$$F=\bigcap_i F_i=\bigcap_i(X-U_i)= X-\bigcup_i U_i$$

ولما كانت $\bigcup_i U_i$ مفتوحة ، فإن متممتها F مغلقة .

(٣) لتكن لدينا جماعة منتهية من المجموعات المغلقة ، ولنبرهن أن اجتماع هذه الجماعة F مجموعة مغلقة . فإذا كانت الجماعة المفروضة خالية ، فإن $F=\varnothing$ ، وبالتالي ، نستنتج استناداً إلى الشق الأول من هذه النظرية

أن F مغلقة . أما إذا لم تكن الجماعة المفروضة خالية ، ولتكن $\{F_1,\ldots,F_n\}$ فثمة مجموعة مفتوحة U_i ، بحيث $F_i = X - U_i$ أياًكان i من $I = \{1,\ldots,n\}$. يترتب على هذا أن :

$$F = \cup_I F_i = \cup_I (X - U_i) = X - \cap_I U_i .$$

ولما كانت $\cap_I U_i$ مفتوحة (لأنها تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة) ، فإن متممتها F مغلقة ■

٣,٣٩٤ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً و x عنصراً من X ، وليكن ε عدداً غير سالب . نطلق اسم **الكرة المغلقة ، التي مركزها x ونصف قطرها ε** على المجموعة :

$$B_D(x,\varepsilon) = \{y \in X : D(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

هذا . وإن لم يكن هناك أكثر من مترك واحد قيد الاستعمال . فليس من الضروري إدراج الدليل D ، ويُكتفى بالرمز $B(x,\varepsilon)$ للدلالة على الكرة المغلقة .

وتجدر بنا الإشارة إلى أن الكرة المغلقة $B(x,\varepsilon)$ لا يمكن أن تكون خالية لاحتوائها على العنصر x على الأقل .

وفي الحالة $\varepsilon = 0$ يكون $B(x,0) = \{x\}$.

٣,٣٩٥ — نظرية

كل كرة مغلقة $B(x,\varepsilon)$ في أي فضاء متري (X,D) هي مجموعة مغلقة .

البرهان

لإثبات هذه النظرية،يكفي استناداً إلى النظرية (٣.٣٩١) . أن نبرهن بأن المجموعة $X - B(x,\varepsilon)$ مفتوحة . فإذا كانت هذه المجموعة خالية ، كانت مفتوحة . وإذا لم تكن خالية . وافترضنا y عنصراً اختيارياً منها ، فإن $D(x,y) > \varepsilon$ ، وعندئذ يكون $\varepsilon' = D(x,y) - \varepsilon$ عدداً موجباً . سنبرهن الآن أن :

$$N(y,\varepsilon') \subseteq X - B(x,\varepsilon)$$

إذا فرضنا z عنصراً ما من $N(y,\varepsilon')$. فإن $D(y,z) < \varepsilon' = D(x,y) - \varepsilon$.

لدينا :

$$D(x,z) \geqslant D(x,y) - D(y,z) > D(x,y) - (D(x,y) - \varepsilon) = \varepsilon$$

وهذا يعني أن $z \in X - B(x,\varepsilon)$ وهكذا . نكون قد وجدنا أن هنالك كرة مفتوحة $N(y,\varepsilon')$ لأي نقطة من المجموعة $X - B(x,\varepsilon)$ محتواة في هذه المجموعة . وبالتالي ، فإن $X - B(x,\varepsilon)$ مفتوحة . وبما أن متممة هذه المجموعة هي $B(x,\varepsilon)$. فإن $B(x,\varepsilon)$ مجموعة مغلقة . ■

٣,٣٩٦ — نتيجة

نستخلص من النظرية (٣,٣٩٥)،ومن كون أي مجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ هي الكرة المغلقة $B(x,0)$ أن أي مجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ لا بد وأن تكون مغلقة في أي فضاء متري .

٣,٣٩٧ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً و Y مجموعة جزئية من X . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية A من Y مغلقة في الفضاء الجزئي (Y,D_Y) ، هو أن توجد مجموعة مغلقة F في X بحيث يكون $A = Y \cap F$.

البرهان

لنفرض أولاً أن A مغلقة في Y ، عندئذ تكون $Y-A$ مفتوحة في Y . لذا ، فثمة مجموعة U مفتوحة في X بحيث $Y-A = Y \cap U$ (٣,٢٩٣) . ويترتب على المساواة الأخيرة أن $A = Y - Y \cap U = Y \cap (X-U)$. فإذا رمزنا للمجموعة $X-U$ بـ F . فإن $A = Y \cap F$ ، حيث F مجموعة مغلقة في X .

وبالعكس ، لنفترض أن $A = Y \cap F$ حيث F مجموعة مغلقة في X . عندئذ $Y-A = Y - Y \cap F = Y \cap (X-F)$. لكن $X-F$ مفتوحة في X ، اذن $Y-A$ مفتوحة في Y ، أي أن A مغلقة في Y . ■

٣،٤ — مجموعات جزئية شهيرة في الفضاءات المترية

Some Important Subsets of Metric Spaces

٣،٤١ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء متريا ، ولتكن A مجموعة جزئية من X . نقول عن x من X إنها **نقطة ملاصقة** لـ A . إذا تقاطع كل جوار لـ x مع A . ويطلق على مجموعة كل النقاط الملاصقة لـ A إسم **لصاقة** A ، ويرمز لها بـ $Cl(A)$ (أو $\overline{A}$) .

٣،٤٢ — مثال

لنأخذ الفضاء $\mathbb{R}$. لدينا هنا $Cl(Q) = R$ و $Cl(Z) = Z$ و $Cl(]0,1[) = [0,1]$ ،

$$Cl(\{\frac{1}{n} : n \in N\}) = \{\frac{1}{n} : n \in N\} \cup \{0\}$$

٣،٤٣ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون x في الفضاء المتري (X,D) نقطة ملاصقة للمجموعة الجزئية A من X . هو أن تقاطع كل كرة مفتوحة مركزها x المجموعة A .

البرهان

إذا كانت x نقطة ملاصقة لـ A ، فإن أي كرة مفتوحة مركزها x لا بد وأن تقاطع A . ذلك أن كل كرة مفتوحة مركزها x هي جوار لـ x (٣.٢٧) . وبالعكس ، لنفترض أن كل كرة مفتوحة مركزها x تقاطع A . وليكن U جواراً ما لـ x . عندئذ . هنالك كرة مفتوحة مركزها x ومحتواة في U (٣.٢٩٢) . ولما كان تقاطع هذه الكرة مع A غير خالٍ ، فإن تقاطع U مع A غير خالٍ . وبالتالي . فإن x نقطة ملاصقة لـ A . ∎

هنالك علاقة بين لصاقة مجموعة A والمجموعة المشتقة لـ A تعبر عنها النظرية التالية .

٣،٤٤ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً و A مجموعة جزئية من هذا الفضاء . عندئذ يكون $Cl(A) = A \cup D(A)$.

البرهان

لنفترض أولاً $x\in Cl(A)$. فإما أنّ $x\in A$ أو $x\notin A$. لنفترض $x\notin A$. لما كانت x ملاصقة لـ A و $x\notin A$ ، فإن أي جوار لـ x يقاطع A في نقطة (على الأقل) مغايرة لـ x . أي أن $x\in D(A)$. وهكذا . نكون قد وجدنا عند افتراضنا $x\in Cl(A)$ أن $x\in A$ أو $x\in D(A)$. إذن $Cl(A)\subseteq A\cup D(A)$. وبالعكس . لنفترض $x\in A\cup D(A)$. فإما $x\in A$ ، وعندها أي جوار لـ x يقاطع A (في x على الأقل) . أو $x\in D(A)$. وعندها أي جوار لـ x يقاطع A أيضاً (في نقطة مغايرة لـ x) . وفي كلتا الحالتين يكون $x\in Cl(A)$. وهذا يعني أن $A\cup D(A)\subseteq Cl(A)$. نستخلص مما سبق أن $Cl(A) = A\cup D(A)$. ■

٣.٤٥ — نظرية

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,D) . فإن $Cl(A)$ مجموعة مغلقة في هذا الفضاء .

البرهان

سنثبت أن أي نقطة حدية لـ $Cl(A)$ ، لا بد وأن تنتمي إلى $Cl(A)$. لنفترض جدلاً أن ثمة نقطة x_0 حدية لـ $Cl(A)$ بحيث $x_0\notin Cl(A)$. إذن نجد استناداً إلى (٣,٤٤) ، أن $x_0\notin D(A)$ و $x_0\notin A$. وبالتالي . فثمة جوار U لـ x_0 بحيث $U\cap A=\varnothing$. لكن x_0 نقطة حدية لـ $Cl(A)$. إذن هنالك نقطة y بحيث $y\in U$ و $y\in Cl(A)$. إذن أي جوار لـ y لا بد وأن يتقاطع مع A . ولما كان U جواراً لـ y (فضلاً عن كونه جواراً لـ x_0) . فإن U يقاطع A . أي أن $U\cap A\neq\varnothing$، وبذا نكون قد توصلنا إلى تناقض . ■

٣.٤٦ — نظرية

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,D) . فإن $Cl(A)$ هي تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحوي A .

البرهان

سنبين أنه إذا كانت F أي مجموعة مغلقة تحوي A ، فإن $Cl(A)\subseteq F$. لنفترض $x\in Cl(A)$. إذن $x\in A$ أو $x\in D(A)$. فإذا كان $x\in A$ ، فإن $x\in F$ وبالتالي $Cl(A)\subseteq F$. وإذا كان $x\in D(A)$. فإن $x\in F$ ، ذلك أنه لو افترضنا أن $x\notin F$ فلا يمكن أن تكون x نقطة حدية لـ F ؛ لذا ، فثمة جوار لـ x لا يقاطع F ، ولا يقاطع بالتالي A (لأن $A\subseteq F$) . بيد أن هذا أمر لا يمكن أن يتم، لأن x نقطة حدية لـ A . إذن . لدينا في هذه الحالة أيضاً $Cl(A)\subseteq F$. يترتب على ما سبق ، أنه إذا كانت $\{F_i\}, i\in I$ أية جماعة من المجموعات المغلقة ، التي يحوي كل منها A ، فإن $Cl(A)\subseteq\cap_i F_i$. لكن $Cl(A)$ مجموعة مغلقة تحوي A ، إذن $\cap_i F_i\subseteq Cl(A)$. وبالتالي ، يكون $Cl(A)=\cap_i F_i$. ■

٣,٤٧ — نتيجة

يترتب على النظرية السابقة أن $Cl(A)$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A .

٣,٤٨ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري (X,D) مغلقة ، هو أن يكون $A = Cl(A)$.

البرهان

إذا كان $A = Cl(A)$. فإن A مغلقة لكون $Cl(A)$ مغلقة (٣.٤٥) . وبالعكس ، لنفترض A مغلقة . لما كانت $Cl(A)$ تقاطع كل المجموعات المغلقة ، التي تحوي A (٣.٤٦) ، وكانت A مجموعة مغلقة تحوي A ، فإن $Cl(A) \subseteq A$. لكن لدينا دوماً $A \subseteq Cl(A)$ (٣.٤٤) . إذن $A = Cl(A)$. ■

٣,٤٩ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، ولتكن A مجموعة جزئية من X . يطلق اسم **داخل** A على اجتماع كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A . ويرمز له بـ $Int(A)$ (أو A°) . وتسمى كل نقطة من $Int(A)$ **نقطة داخلية** للمجموعة A .

٣,٤٩١ — نتائج

نستخلص من التعريف السابق النتائج التالية :

(١) إن $Int(A)$ مجموعة مفتوحة محتواة في A ، بل هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A .

(٢) الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة داخلية لـ A ، هو أن يوجد جوار لـ x محتوى في A . ومن الممكن ، التحقق بسهولة من أن الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة داخلية لـ A ، هو أن توجد كرة مفتوحة مركزها x محتواة في A.

٣,٤٩٢ — مثال

لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$. في هذا الفضاء ، نرى أن

$Int(]0,1]) =]0,1[$, $Int(]0,1[) =]0,1[$, $Int(\{\frac{1}{n} : n \in N\}) = \varnothing$, $Int(R) = R$.

أما إذا أخذنا الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^2$. فإن

$$\mathrm{Int}(\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}) = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

كما أن $\mathrm{Int}(\{(x,1) : x \in R\}) = \varnothing$

٣,٤٩٣ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري (X,D) مفتوحة، هو أن يكون $A = \mathrm{Int}(A)$

البرهان

إذا كان $A = \mathrm{Int}(A)$. فإن A مفتوحة **لكون** Int(A) مفتوحة (٣,٤٩١) . وبالعكس ، لنفترض A مفتوحة . لما كانت Int(A) اجتماع كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A تعريفاً . وكانت A مجموعة مفتوحة محتواة في A فإن $A \subseteq \mathrm{Int}(A)$. لكن لدينا دوماً $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ ، إذن $A = \mathrm{Int}(A)$. ■

٣,٤٩٤ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً ولتكن A مجموعة جزئية من X . نقول إن A **كثيفة** (في كل مكان) في X إذا كان $\mathrm{Cl}(A) = X$.

٣,٤٩٥ — مثال

إن مجموعة الأعداد العادية Q كثيفة في فضاء الأعداد الحقيقية **المألوف** $\mathbb{R}$. في حين أن مجموعة الأعداد الصحيحة . ليست كذلك .

٣,٤٩٦ — نظرية :

ليكن (X,D) فضاء مترياً . و A مجموعة جزئية من X . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون A كثيفة في X . هو أن تتقاطع كل مجموعة مفتوحة غير خالية في X مع A .

البرهان

لنفترض أولاً A كثيفة في X . وأن U مجموعة مفتوحة غير خالية في X . إذن ثمة عنصر x منتمٍ الى U . لما كان $\mathrm{Cl}(A) = X$ ، وكان x عنصراً من X ، فإن $x \in \mathrm{Cl}(A)$. وبالتالي ، فأي مجموعة مفتوحة تحوي x لا بد وأن تتقاطع مع A ، وبوجه خاص ، فإن $U \cap A \neq \varnothing$. وبالعكس ، لنفترض أن كل مجموعة مفتوحة غير خالية في X تتقاطع مع A . لتكن x نقطة اختيارية من X . لما كانت كل مجموعةٍ مفتوحةٍ حاوية لـ x ، لا بد وأن تتقاطع مع A . فإن $x \in \mathrm{Cl}(A)$ ، إذن $X \subseteq \mathrm{Cl}(A)$. لكن $\mathrm{Cl}(A) \subseteq X$ ، إذن $\mathrm{Cl}(A) = X$ ، أي أن A كثيفة في X. ■

٣,٥ — المتواليات المتقاربة والفضاءات التامة

Convergent Sequences and Complete Spaces

على الرغم من أن احد أهم الأغراض المتوخاة من إيراد الفضاءات المترية . هو دراسة المتواليات المتقاربة في فضاءات أعم من الفضاءات $\mathbb{R}^n$ ، التي تشكل الموضوع الرئيسي لعلم التحليل الرياضي . الا أن هذه الدراسة . تعيننا بدورها على إدراك أعمق لمسألة تقارب المتواليات التي يتناولها التحليل الرياضي التقليدي .

٣,٥١ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء متريا ، و $\{x_n\}, n\in N$ متوالية في X . وليكن x عنصراً من X . نقول إن المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ **تتقارب من** x ، إذا قابل كلَّ عدد موجب ε عدد صحيح موجب N_ε . بحيث يكون $x_n \in N(x,\varepsilon)$ (أي $D(x_n,x) < \varepsilon$) عندما $n \geqslant N_\varepsilon$. وإذا كانت $\{x_n\}, n\in N$ متقاربة من x . فإننا نقول إن x **نهاية المتوالية** ونكتب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{أو} \qquad x_n \to x$$

من الممكن إيراد هذا التعريف على النحو التالي : تتقارب المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ من x إذا حوت أيُّ كرة مفتوحة مركزها x جميع عناصر المتوالية باستثناء عدد منته من هذه العناصر (قد يكون هذا العدد مساوياً للصفر) .

٣,٥٢ — مثال

لتكن المتوالية $\{(0,\frac{1}{n})\}, n\in N$ في الفضاء الأقليدي $\mathbb{R}^2$. ولنثبت أنها متقاربة من النقطة $(0,0)$. لدينا أياً كان العدد الصحيح الموجب n : $D((0,\frac{1}{n}),(0,0)) = [(0-0)^2+(\frac{1}{n}-0)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}$. فإذا كان ε عدد موجباً ما . وكان N_ε أي عدد صحيح يحقق المتراجحة $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. فإننا نلاحظ أنه إذا كان $n \geqslant N_\varepsilon$. فإن $\frac{1}{n} < \varepsilon$. وبالتالي . نرى أنه ايا كان العدد الموجب ε . فثمة عدد صحيح موجب N_ε . بحيث أن المتراجحة $n \geqslant N_\varepsilon$ تقتضي $D((0,\frac{1}{n}),(0,0)) < \varepsilon$ أو $(0,\frac{1}{n}) \in N((0,0),\varepsilon)$. وهذا يعني أن $(0,\frac{1}{n}) \to (0,0)$ في الفضاء $\mathbb{R}^2$. أما لو زودنا المجموعة $\mathbb{R}^2$ بالمترك المنقطع (٣.١٢) . غدت المتوالية السابقة نفسها غير متقاربة من $(0,0)$ في هذا الفضاء المنقطع . وفي الحقيقة . فإن الكرة المفتوحة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 في الفضاء المنقطع هي $\{(0,0)\}$ (٣.٢٣) . ومن الواضح أن هذه الكرة المفتوحة تستثني عناصر المتوالية جميعا . وهكذا . نرى أن متوالية واحدة عناصرها في مجموعة واحدة . قد تكون متقاربة أو غير متقاربة . وذلك تبعاً للبنية المترية التي نزود بها المجموعة .

٣,٥٣ — نظرية

لا يمكن أن يكون لمتوالية $\{x_n\}, n\in N$ في فضاء متري (X,D) أكثر من نهاية واحدة .

البرهان

إذا افترضنا جدلا أن للمتوالية $\{x_n\}, n\in N$ نهايتين مختلفتين x,y ، كان العدد $\varepsilon = \frac{1}{2}D(x,y)$ موجباً . عندئذ يكون التقاطع $N(x,\varepsilon) \cap N(y,\varepsilon)$ خالياً . ذلك أنه لو انتمى عنصر z إلى هذا التقاطع ، لكان $z\in N(y,\varepsilon)$ و $z\in N(x,\varepsilon)$، ولكان بالتالي $D(y,z) < \varepsilon$ و $D(x,z) < \varepsilon$. الأمر الذي يؤدي إلى التناقض التالي :

$$2\varepsilon = D(x,y) \leq D(x,z) + D(y,z) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

وهكذا ، فإن القبول بوجود نهايتين مختلفتين x,y يقتضي وجود كرتين مفتوحتين منفصلتين مركزاهما x,y . وبما أن x نهاية للمتوالية المفروضة ، فإن جميع عناصر هذه المتوالية ، باستثناء عدد منته منها، موجودة في $N(x,\varepsilon)$. ولما كانت $N(x,\varepsilon)$ منفصلة عن $N(y,\varepsilon)$. فلا يمكن أن تحوي $N(y,\varepsilon)$ إلا عدداً منتهياً من عناصر المتوالية ، الأمر الذي يناقض وجوب احتواء $N(y,\varepsilon)$ على جميع عناصر المتوالية ، باستثناء عدد منته منها . لذا ، فإن $x=y$. ■

٣,٥٤ — نظرية

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ من x في الفضاء المتري (X,D) هو أن يحوي كل جوار لـ x جميع عناصر المتوالية باستثناء عدد منته منها .

البرهان

لنفرض $x_n \to x$ و U أي جوار لـ x . لما كانت U مجموعة مفتوحة . فثمة كرة مفتوحة $N(x,\varepsilon)$ محتواة في U . وبما أن x نهاية المتوالية ، فإن جميع عناصر هذه المتوالية، باستثناء عدد منته منها، محتوى في $N(x,\varepsilon)$ ، وبالتالي موجود في U .

وبالعكس ، لنفرض أن اي جوار لـ x يحوي جميع عناصر المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ باستثناء عدد منته منها . لما كانت الكرة $N(x,\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة أياً كان العدد الموجب ε ، فإننا نستنتج أن أي كرة مفتوحة مركزها x تحوي جميع عناصر المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ ، باستثناء عدد منته منها . لذا ، فإن المتوالية تتقارب من x . ■

من الممكن استخدام المتواليات في الفضاءات المترية من أجل تعيين النقاط الحدية، وبالتالي من أجل تعيين المجموعات المغلقة . على نحو ما تبين النظرية التالية .

٣,٥٥ ـــ نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، و $A \subseteq X$. عندئذ ، يكون :

(١) الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة حدية لـ A ، هو أن توجد متوالية من عناصر $A-\{x\}$ متقاربة من x .

(٢) الشرط اللازم والكافي كي تكون A مغلقة ، هو أن يكون لكل متوالية متقاربة،عناصرها في A،نهاية منتمية الى A .

البرهان

(١) لنفرض x نقطة حدية لـ A . لذا ، أيا كان العدد الصحيح الموجب n ، فهنالك عنصر x_n بحيث $x_n \in N(x,\frac{1}{n}) \cap (A-\{x\})$. من السهل التحقق بأن هذا يعني أن المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ (التي من الواضح انتماء جميع عناصرها الى $A-\{x\}$) تتقارب من x .

وبالعكس ، لنفرض $\{x_n\}, n\in N$ متوالية من عناصر $A-\{x\}$ ، بحيث أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. إذن أيا كان الجوار U لـ x ، فثمة عدد صحيح موجب (واحد على الأقل) n بحيث $x_n \in U$. لما كان $x_n \in A$ و $x_n \neq x$ ، فإننا نستنتج أن أي جوار لـ x يتقاطع مع A في نقطة (واحدة على الأقل) مغايرة لـ x . وهذا يعني أن x نقطة حدية لـ A .

(٢) لنفرض أن A مغلقة ، وأن $\{x_n\}, n\in N$ متوالية من عناصر A بحيث $x_n \to x$ ، ولنثبت أن $x\in A$. لنقبل مؤقتاً أن $x\notin A$ ، أي $x\in X-A$.لما كانت $X-A$ مفتوحة و x عنصراً منها ، فإننا نكون قد وجدنا جوارا $X-A$ للنقطة x لا يحوي أياً من عناصر المتوالية ، وهذا غير ممكن لأن x نهاية المتوالية .

وبالعكس ، لنفرض أن لكل متوالية متقاربة في A نهاية منتمية إلى A . إذا لم تكن A مغلقة ، فهناك نقطة حدية (واحدة على الأقل) x بحيث $x\notin A$. عندئذ نستنتج أنه أياً كان العدد الصحيح الموجب n ، فهنالك عنصر x_n ، بحيث $x_n \in N(x,\frac{1}{n}) \cap (A-\{x\})$. إن هذا يعني بأن $\{x_n\}, n\in N$ متوالية متقاربة في A من النقطة x غير المنتمية إلى A ، وهذا يناقض الفرض . لذا ، فإن A مغلقة . ■

٣,٥٦ ـــ ملاحظة

إذا كانت $\{x_n\}, n\in N$ متوالية متقاربة في فضاء متري (X,D) ، فإنها تحقق الخاصة التالية : أياً كان العدد الموجب ε ، فثمة عدد صحيح موجب N_ε بحيث تتحقق المتراجحة $D(x_m, x_n) < \varepsilon$ ، إذا كان m,n أي عددين صحيحين موجبين يحققان الشرطين $n \geq N_\varepsilon$ ، $m \geq N_\varepsilon$. وفي الحقيقة ، إذا كان $x_n \to x$، فهنالك عدد صحيح موجب

N_ε بحيث $D(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geq N_\varepsilon$. ويترتب على هذا أن :

$$m,n \geq N_\varepsilon \Rightarrow D(x_m,x_n) \leq D(x_m,x) + D(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

تسمى كل متوالية تحقق هذه الخاصة **متوالية أساسية ؛ أو متوالية كوشي** . وهكذا ، فإنه يترتب على ما سبق أن كل متوالية متقاربة في فضاء متري هي متوالية أساسية . ومن الجدير بالملاحظة أن العكس غير صحيح . أي أن المتوالية الأساسية ليست متقاربة بالضرورة . وعلى سبيل المثال ، إذا عرفنا على المجموعة $]0,1]$ المترك النسبي الناتج عن المترك المألوف على R ، فإننا نجد فضاء متريا . من السهل التحقق من أن $\{\frac{1}{n}\}, n\in N$ متوالية أساسية في هذا الفضاء . بيد أن هذه المتوالية غير متقاربة ، ذلك أن النقطة 0 ،التي ينبغي أن تكون نهاية للمتوالية،لا تنتمي إلى المجموعة $]0,1]$.

إن الفضاءات المترية ، التي تكون كل متوالية أساسية فيها متقاربة ، تشغل مركزا مرموقا في التحليل الرياضي . لذا وجد من المناسب إيراد التعريف التالي .

٣,٥٧ — تعريف

نقول عن فضاء متري (X,D) إنه **تامّ** إذا كانت كل متوالية أساسية فيه متقاربة .

٣,٥٨ — نظرية

إن فضاء الأعداد الحقيقية**المألوف** $\mathbb{R}$ تام .

البرهان

لتكن $\{x_n\}, n\in N$ متوالية أساسية في $\mathbb{R}$. سنعين متوالية من الأعداد الصحيحة $\{n_k\}, k\in N$ بطريقة التدرج على النحو التالي : نختار n_{k+1} أصغرعدد صحيح أكبر من n_k بحيث أنه إذا كان $n \geq n_{k+1}$ ، $m \geq n_{k+1}$. فإن المتراجحة $|x_m - x_n| < 2^{-k-2}$ تغدو محققة . ومن الواضح أن إمكان هذا التعيين للأعداد n_k ناتج عن كون المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ أساسية.لنفرض I_k المجال المغلق $[x_{n_k}-2^{-k}, x_{n_k}+2^{-k}]$. لما كان $|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| < 2^{-k-1}$. فمن السهل التحقق بأن $I_{k+1} \subseteq I_k$. ومن جهة أخرى ، من الواضح أنه إذا كان $p \geq n_k$. فإن $x_p \in I_k$. وبالتالي . واستناداً إلى نظرية المجالات المتداخلة (٢,٥٩٢) ، فإننا نستنتج أنّ للمجالات المتداخلة I_k تقاطعاً غير خال . فإذا افترضنا أن $x\in I_k$ أيا كان k ، فمن الممكن التحقق عندئذ من أن $|x - x_n| < 2^{-k-1}$ أيا كان n بحيث $n \geq n_k$. وبالتالي . فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. الأمر الذي يترتب عليه أن المتوالية الأساسية $\{x_n\}, n\in N$ متقاربة في $\mathbb{R}$. أي ان فضاء الأعداد الحقيقية **المألوف** تام .

٣,٥٩ — مثال

لنأخذ الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ (٣,١٤) . سنبين الآن أن هذا الفضاء تام استناداً إلى تمام الفضاء $\mathbb{R}$.

البرهان

لتكن $\{x^{(p)}\}, p\in N$ متوالية أساسية من عناصر $\mathbb{R}^n$. يعني هذا أنه يقابل كلّ عدد موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث تتحقق المتراجعة $\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(p)}-x_k^{(q)})^2<\varepsilon^2$ ، أيا كان العددان الصحيحان الموجبان p,q اللذان يكبران N_ε . وذلك بفرض $x^{(p)}=(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\ldots,x_n^{(p)})$. عندئذ . نجد أنه أيا كان $k=1,2,\ldots,n$ فإن $|x_k^{(p)}-x_k^{(q)}|<\varepsilon$ أياً كان العددان الصحيحان الموجبان p,q اللذان يكبران N_ε . وهذا يعني أن $\{x_k^{(p)}\}, p\in N$ متوالية عددية أساسية . ولما كان الفضاء $\mathbb{R}$ تاما . فإن المتوالية متقاربة . لنفرض أن $\lim_{p\to\infty} x_k^{(p)}=x_k$. وأن $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ عندئذ نرى بوضوح أن $\lim_{p\to\infty} x^{(p)}=x$ وبكون بهذا قد برهنا على أن أي متوالية أساسية في الفضاء الأقليدي $\mathbb{R}^n$ متقاربة ، أي أن هذا الفضاء المتري تام . ■

٣،٥٩١ — نتيجة

لما كانت كل متوالية متقاربة في فضاء متري هي متوالية أساسية . فإن المثالين السابقين يبينان بأن الشرط اللازم والكافي كي تكون متوالية في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف،أو بوجه أعم . في الفضاء الأقليدي ذي الأبعاد n متقاربة، هو أن تكون متوالية أساسية في كل من هذين الفضاءين . وبعبارة أخرى . فإن صف المتواليات الأساسية في كل من هذين الفضاءين يتطابق وصف المتواليات المتقاربة .

إن سبب أهمية الفضاءات التامة . يكمن في أنه عندما ينبغي إثبات تقارب متوالية في فضاء تام . يكفي البرهان على أن هذه المتوالية أساسية . وهذا يعفينا من البحث عن نهاية هذه المتوالية . ولايضاح هذا نورد المثال التالي :

٣،٥٩٢ — مثال

لتكن $\{a_n\}, n\in N$ متوالية في $\mathbb{R}$ بحيث $a_1=1, a_2=3$، في حين تتحدد بقية العناصر بالدستور $a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$ أيا كان n من N . من الممكن التحقق من أن $|a_{n+1}-a_n|=\frac{1}{2^{n-2}}$ أيا كان n من N. وبالتالي . فإذا افترضنا $m>n$. نجد

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|=$$

$$=\frac{1}{2^{m-3}}+\frac{1}{2^{m-4}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n-2}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right)<\frac{1}{2^{n-4}}$$

وبالتالي . فإذا كان ε عددا موجباً ما . فمن الواضح وجود عدد صحيح موجب N_ε . بحيث $2^{N_\varepsilon}>\frac{4}{\varepsilon}$.

لنفترض m,n عددين صحيحين موجبين بحيث $m,n \geqslant N_\varepsilon$ عندئذ . نلاحظ أن

$$m,n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow 2^n \geqslant 2^{N_\varepsilon} \Rightarrow 2^{n-2} \geqslant 2^{N_\varepsilon - 2} \Rightarrow 2^{n-2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

وبالتالي . فإن متواليتنا أساسية . ولما كان الفضاء $\mathbb{R}$ تاما (٣.٥٩٢) . فإن هذه المتوالية متقاربة .

سنختتم هذا البند بإيراد واحدة من أهم نظريات علم التحليل الرياضي . ذلك أنها أداة فعالة عند البحث في العديد من نظريات الوجود في المعادلات التفاضلية والتكاملية والجبرية . وسنقدم لهذه النظرية بالتعريفين التاليين .

٣,٥٩٣ — تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية . ولتكن $\varphi : X \to X$ دالة ما . نقول عن x_o من X إنها **نقطة ثابتة** للدالة φ . إذا كان $\varphi(x_o) = x_o$. أي إذا لم يتغير خيال x_o وفق الدالة φ .

إن كثيراً من المسائل . التي تبحث عن وجود شيء رياضي ما . ليست في واقع الحال **سوى** مسائل هدفها البحث عن وجود نقطة ثابتة لدالة معينة . وعلى سبيل المثال . فالشرط اللازم والكافي كي يكون للمعادلة $x^3 - 5x^2 - x + 7 = 0$ حل حقيقي . هو أن يوجد للدالة $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ نقطة ثابتة .

٣,٥٩٤ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء متريا . ولتكن $\varphi : X \to X$ دالة ما . نقول عن φ إنها **دالة تقليص**، إذا وُجد عدد حقيقي α . بحيث $0 < \alpha < 1$. وبحيث

$$D(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \alpha D(x,y)$$

أيا كان x,y من X

٣,٥٩٥ — مثال

لنأخذ المجموعة $[0, \frac{1}{3}]$ المزودة بالمترك النسبي الناتج عن المترك المألوف على $\mathbb{R}$. ولنعرِّف على هذه المجموعة الدالة φ المحددة بالدستور $\varphi(x) = x^2$. نلاحظ أنه أيا كان $x,y \in [0, \frac{1}{3}]$. فإن

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \leqslant \frac{2}{3}|x - y|$$

لذا فإن φ دالة تقليص .

٣,٥٩٦ — نظرية النقطة الثابتة

ليكن (X,D) فضاء متريا **تاما** و $\varphi : X \to X$ دالة تقليص . عندئذ . ثمة نقطة ثابتة وحيدة للدالة φ.

البرهان

أياكان العنصران x,y من X . فإن $D(\varphi(x),\varphi(y)) < \alpha D(x,y)$ ، حيث $0 < \alpha < 1$. لنفترض x_o عنصراً ما من X ، ولنعرف المتوالية $\{x_n\}, n \in N$ بالمساواة $x_n = \varphi(x_{n-1})$، حيث $n = 1,2,\ldots$ نلاحظ أنه أياكان العدد n من N فإن

$$D(x_n, x_{n+1}) = D(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n))$$

$$< \alpha D(x_{n-1}, x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$< \alpha^n D(x_o, x_1)$$

وهكذا . فإذا كان $m > n$ فإن

$$D(x_n, x_m) < \sum_{\gamma=n}^{m-1} D(x_\gamma, x_{\gamma+1})$$

$$< D(x_0,x_1) \sum_{\gamma=n}^{m-1} \alpha^\gamma < \alpha^n D(x_0,x_1) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \alpha^\gamma$$

$$= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} D(x_0,x_1)$$

من السهل ملاحظة أن هذا يعني بأن $\{x_n\}, n \in N$ هي متوالية أساسية . ولما كان الفضاء (X,D) تاما ، فإن هذه المتوالية تتقارب من نقطة ما x من X ، أي $x_n \to x$. وبما أن

$$D(\varphi(x), x_n) = D(\varphi(x), \varphi(x_{n-1})) < \alpha D(x, x_{n-1})$$

فمن السهولة بمكان رؤية أن $x_n \to \varphi(x)$. ولما كانت المتوالية في فضاء متري لا يمكن أن تتقارب من نهايتين مختلفتين . فإن $x = \varphi(x)$، أي أن x نقطة ثابتة . هذا . ولا يمكن وجود نقطة ثابتة أخرى لـ φ . لأنه لو افترضنا جدلاً أن ثمة نقطة ثابتة y لـ φ مختلفة عن x ، لكان $D(x,y) \neq 0$ من جهة ، ولكان من جهة أخرى

$$D(x,y) = D(\varphi(x), \varphi(y)) < \alpha D(x,y)$$

الأمر الذي لا يمكن أن يتم لأن $0 < \alpha < 1$ ■

٣،٦ — الفضاءات المتراصة (الملتحمة)

Compact Spaces

يعتبر التراص في الفضاءات المترية . والذي كان أول من أورده **فريشيه** عام ١٩٠٦م. من أهم المفاهيم التوبولوجية . وسنرى في الفصول اللاحقة أن كون الفضاء المتري متراصا يسبغ عليه كثيراً من الخواص الهامة .

٣،٦١ — تعريف

نقول عن جماعة من المجموعات الجزئية $\mathcal{U}$ من فضاء متري (X,D) . إنها **تغطي** X . أو إنها **تغطية** لـ X . إذا كان اجتماع عناصر $\mathcal{U}$ يساوي X . وتسمى هذه الجماعة **تغطية مفتوحة** لـ X إذا كانت عناصرها مجموعات مفتوحة في (X,D) وتغطي X .

٣،٦٢ — تعريف

نقول عن فضاء متري (X,D) إنه **متراص** (أو ملتحم) ، إذا حوت كل تغطية مفتوحة $\mathcal{U}$ لـ X جماعة جزئية منتهية من $\mathcal{U}$ تغطي X كذلك ، أي إذا حوت كلُّ تغطية مفتوحة لـ X تغطيةً جزئية منتهية لـ X.

٣،٦٣ — مثال

كل فضاء (X,D) مؤلف من عدد منته من النقاط متراصٌ ، وذلك ، لأنه إذا كانت $\mathcal{U}$ أي تغطية مفتوحة لـ $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ، فهنالك عناصر $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ بحيث $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$ وبالتالي . فإن $\{U_1, \ldots\ldots, U_n\}$ تشكل تغطية جزئية منتهية من $\mathcal{U}$.

٣،٦٤ — مثال

لنأخذ المجموعة $X =]0,1[$ المزودة بالمترك النسبي D الناتج عن المترك المألوف على R . من السهل التحقق أن الجماعة $\{]\frac{1}{n+1}, 1[\ , n \in N\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ $]0,1[$. ونترك للقارىء التحقق كذلك من أن هذه التغطية لا يمكن أن تحوي تغطية جزئية منتهية . وبالتالي . فالفضاء (X,D) ليس متراصا . وسنرى في (٣،٦٩٤) ، أنه إذا استعضنا عن المجموعة X بالمجموعة $[0,1]$ ، فإن الفضاء الجديد يغدو متراصا .

٣,٦٥ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً و Y مجموعة جزئية من X . نقول عن جماعة $\mathscr{A}$ من المجموعات الجزئية من X إنها **تغطية لـ** Y، إذا حوى اجتماع عناصر هذه الجماعة المجموعة Y . ونقول عن Y إنها **متراصة في** X إذا كان الفضاء الجزئي (Y,D_Y) متراصا .

٣,٦٦ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء مترياً و Y مجموعة جزئية من X . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون Y متراصة في X هو أن تحوي كل تغطية لـ Y بمجموعات مفتوحة في X تغطية جزئية منتهية لـ Y .

البرهان

لنفترض Y متراصة في X . ولتكن $\{A_i : i \in I\}$ تغطية لـ Y بمجموعات مفتوحة في X. عندئذ . تشكل الجماعة $\{A_i \cap Y, i \in I\}$ تغطية لـ Y بمجموعات مفتوحة في Y . وبالتالي. فهنالك جماعة جزئية منتهية $\{A_{i_k} : k \in \{1,\ldots,n\}\}$ تغطي Y بمجموعات مفتوحة في Y . وعندها . تشكل $\{A_{i_k} : k \in \{1,\ldots,n\}\}$ تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة $\{A_i : i \in I\}$ لـ Y. وبالعكس . لنفترض تحقق شرط النظرية . ولنثبت أن Y متراصة في X . لتكن $\{A'_i : i \in I\}$ تغطية لـ Y بمجموعات مفتوحة في X . لنقابل كل i من I بمجموعة A_i مفتوحة في X . بحيث $A'_i = Y \cap A_i$. إن $\{A_i : i \in I\}$ تشكل تغطية لـ Y بمجموعات مفتوحة في X . وبالتالي . نجد استناداً إلى الفرض تغطية جزئية منتهية $\{A_{i_k} : k \in \{1,\ldots,n\}\}$ لـ Y. وعندئذ تكون $\{A'_{i_k} : k \in \{1,\ldots,n\}\}$ تغطية جزئية منتهية من $\{A'_i : i \in I\}$ لـ Y . ■

هذا . ونترك للقارىء التحقق من صحة النظرية التالية .

٣,٦٧ — نظرية

ليكن (X,D) فضاء متريا . ولتكن Y مجموعة جزئية غير خالية من X . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية E من Y متراصةً في Y هو أن تكون E متراصة في X .

٣,٦٨ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً و $\{A_i : i \in I\}$ جماعة من المجموعات الجزئية من X . نقول عن $\{A_i : i \in I\}$ إنها **جماعة متمركزة** (**أو جماعة متمتعة بخاصة التقاطع المنتهي**) إذا كان لأي جماعة جزئية منتهية من $\{A_i : i \in I\}$ تقاطع غير خال .

إن تقديمنا لهذا التعريف يساعد في إيراد معيار بالغ الأهمية من معايير تحديد الفضاءات المتراصة . وذلك من خلال النظرية التالية .

٣,٦٩ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء متراصاً . هو أن يكون لأي جماعة متمركزة $\{F_i : i\in I\}$ من المجموعات الجزئية المغلقة في هذا الفضاء تقاطع غير خال .

البرهان

ليكن (X,D) فضاء متراصا . ولتكن $\{F_i : i\in I\}$. أي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في (X,D) . ولنبين أن $\cap_i F_i \neq \emptyset$. لنفترض مؤقتاً ، أن $\cap_i F_i = \emptyset$ ، عندئذ يكون $X - \cap_i F_i = X$ ، أو $\cup_i (X-F_i) = X$. ولما كانت $X - F_i$ مجموعة مفتوحة في (X,D) أيا كان i من I ، فإننا نستنتج أن $\{X-F_i : i\in I\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ (X,D) . لكن (X,D) فضاء متراص ، إذن ثمة تغطية جزئية منتهية . ولتكن $\{X-F_{i_k} : k\in\{1,\ldots,n\}\}$ ، من التغطية المفتوحة $\{X-F_i : i\in I\}$ للفضاء (X,D) . ويترتب على هذا أن $X = \bigcup_{k=1}^{n}(X-F_{i_k})$ ، أو $X = X - \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}$ ، الأمر الذي ينجم عنه أن $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$. ولكن هذا يعني أن الجماعة $\{F_i : i\in I\}$ غير متمركزة . وهذا مناقض للفرض . وبالتالي ، فإن $\cap_i F_i \neq \emptyset$.

وبالعكس . لنفرض أن لأي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في الفضاء (X,D) تقاطعا غير خال . ولنثبت أن (X,D) فضاء متراص . لتكن $\{U_i : i\in I\}$ أي تغطية مفتوحة لهذا الفضاء . عندئذ . يكون $X - \cup_i U_i = \emptyset$ ، أو $\cap_i (X-U_i) = \emptyset$. ولما كانت $X-U_i$ مجموعة مغلقة في (X,D) ، فإننا نستنتج أن جماعة المجموعات الجزئية من X المغلقة $\{X-U_i : i\in I\}$ ليست متمركزة . وبالتالي . نجد استناداً الى التعريف (٣.٦٨) أن هنالك عدداً منتهياً $X-U_{i_1},\ldots,X-U_{i_n}$ من عناصر الجماعة $\{X-U_i : i\in I\}$. بحيث أن $\bigcap_{k=1}^{n}(X-U_{i_k}) = \emptyset$ أو $X - \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} = \emptyset$. الأمر الذي يتعين عليه أن $\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} = X$. ولكن هذا يعني أن $\{U_{i_k} : k\in\{1,\ldots,n\}\}$ تشكل تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة الاختيارية $\{U_i . i\in I\}$ للفضاء (X,D) ، أي أن (X,D) فضاء متراص ■

٣,٦٩١ — نظرية

أي مجموعة جزئية **مغلقة** في فضاء متراص (X,D) لا بد وأن تكون متراصة في X .

البرهان

ليكن (X,D) فضاء متراصا . ولتكن A مجموعة جزئية مغلقة في (X,D) . لنفترض $\{F : i\in I\}$ أي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية من A والمغلقة في (A,D_A) . لما كانت A مغلقة في (X,D) ، وكانت F مغلقة في (A,D_A) أيا كان i من I ، فإن F_i أيا كان i مغلقة في (X,D) . وبالتالي ، فإن $\{F_i : i\in I\}$ جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في (X,D) . ولما كان (X,D) متراصا ، فإن $\cap_i F_i \neq \emptyset$ استنادا إلى (٣.٦٩) . وهكذا نرى أن لأي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في (A,D_A) تقاطعا غير خال . إذن فالفضاء الجزئي ((A,D_A)) متراص .

٣,٦٩٢ — تعريف

نقول عن مجموعة A من فضاء متري (X,D) إنها **محدودة**، إذا وجدت كرة مفتوحة $N(x_o,K)$ مركزها نقطة ما x_o من X، ونصف قطرها عدد حقيقي موجب K ، بحيث $A\subseteq N(x_o,K)$.

٣,٦٩٣ — نظرية

كل مجموعة جزئية متراصة A في فضاء متري (X,D) لا بد وان تكون مغلقة ومحدودة .

البرهان

ليكن x عنصراً اختيارياً مثبتاً في $X-A$ ، وليكن y عنصراً من A . من الواضح أن ثمة جواراً U_y لـ x وجواراً V_y لـ y بحيث $U_y\cap V_y=\emptyset$. (إذا رمزنا للعدد الموجب $D(x,y)$ بـ 2ε مثلاً . فمن الممكن أخذ $(U_y=N(x,\varepsilon), V_y=N(y,\varepsilon)$). إن الجماعة $\{V_y : y\in A\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ A بمجموعات مفتوحة في X ولما كانت A متراصة . فثمة عدد منته من النقاط في A . ولتكن $y_1,\ldots,y_n$. بحيث تشكل $\{Vy_i : i\in\{1,\ldots,n\}\}$ تغطية مفتوحة لـ A (٣,٦٦) . لنفرض أن $U=\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}$ و $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}$. من الواضح . أن $x\in U$ و $A\subseteq V$ و $U\cap V=\emptyset$. وبالتالي ، نكون قد وجدنا أنه أيا كان العنصر x من $X-A$. فثمة جوار لـ x هو U . بحيث $U\subseteq X-A$. إذن $X-A$ مفتوحة (لماذا؟) ، أي أن A مغلقة .

بقي علينا إثبات محدودية A . اذا كان x_o عنصراً اختيارياً من X، فإن الكرات المفتوحة $N(x_o,n)$ ، حيث $n=1,2,\ldots$، تشكل تغطية مفتوحة لـ X . وبالتالي لـ A . ولما كانت A متراصة، وكان $N(x_o,n+1)\supseteq N(x_o,n)$ أيا كان n من N . فثمة عدد صحيح موجب n_o بحيث $A\subseteq N(x_o,n_o)$. وهذا يعني أن A محدودة . ■

إن عكس هذه النظرية غير صحيح بعامة ، الأمر الذي يبينه المثال التالي : لتكن X مجموعة غير منتهية . ولنزودها بالمترك المنقطع D (٣,١٢). من الواضح ،أن X مجموعة مغلقة (٣.٣٩٢) ومحدودة (لأن $X\subseteq N(x,2)$ حيث x عنصر ما من X (٣,٢٣)). بيد أن هذا الفضاء ليس متراصاً ، ذلك أنه لا يمكن أن نستخلص من التغطية المفتوحة $\{\{x\} : x\in X\}$ لهذا الفضاء تغطية جزئية منتهية . اذ أن أي تغطية جزئية منتهية من هذه التغطية لا تغطي إلا عددا منتهيا من عناصر X . أي لا تغطي X بأكملها، لكون X غير منتهية . وهكذا نكون قد وجدنا بأن كون المجموعة الجزئية من فضاء متري (X,D) مغلقة ومحدودة لا يترتب عليه أنها متراصة . الا أنه من الاهمية بمكان أن نعلم بأن هذا العكس يصح في الفضاءات الاقليدية $\mathbb{R}^n$، أيا كان العدد الصحيح الموجب n . وسنقتصر في النظرية التالية على إثبات هذه الدعوى في الحالة $n=1$. أي في حالة الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$.

٣٦٩٤ — نظرية (هاين — بوريل Heine-Borel)

كل مجموعة مغلقة ومحدودة E في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$ لا بد وأن تكون متراصة في $\mathbb{R}$.

البرهان

لما كانت E محدودة ، فهي محتواة في كرة مفتوحة $N(x_0, K)$ في $\mathbb{R}$. أي في مجال مفتوح $]a,b[$ مثلا . فاذا رمزنا للمجال المغلق $[a,b]$ بـ Y ، فإننا نستنتج أن $E \subseteq Y$. لنأخذ الآن الفضاء المتري (Y, D_1) حيث D_1 هو المترك النسبي على Y الناتج عن المترك المألوف على $\mathbb{R}$. لما كان $E = Y \cap E$ ، وكانت E مغلقة في الفضاء الكلي $\mathbb{R}$ فرضاً . فإن E مغلقة في (Y, D_1) (٣,٣٩٢) . وإستناداً الى النظرية (٣,٦٨)،يكفي للبرهان على أن E متراصة في (Y, D_1)،إثبات أن المجموعة $Y = [a,b]$ متراصة في $\mathbb{R}$.

لتكن $\{U_i : i \in I\}$ تغطية مفتوحة ما لـ $[a,b]$ ، حيث كل من U_i مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. ولنرمز بـ A لمجموعة العناصر x من $[a,b]$ بحيث يكون لـ $[a,x]$ تغطية جزئية منتهية من التغطية $\{U_i : i \in I\}$. إن A غير خالية ، اذ أنها تحوي العنصر a على الأقل . كذلك ، فإن A محدودة من الأعلى . إذ أن b عنصر حادٌ من الأعلى لـ A . واستناداً الى مسلمة التمام (٢,٥١) ، فإننا نستنتج أن لـ A حداً أعلى . أي أن ثمة عددا m بحيث $m = \sup A$. سنبين أن m ينتمي إلى $[a,b]$. من المعلوم أن أي جوار للحد الأعلى m لـ A لا بد وأن يقاطع A . لكن $A \subseteq [a,b]$. إذن اي جوار لـ m لا بد وأن يتقاطع مع $[a,b]$. وبالتالي فإن $m \in Cl([a,b])$. لكن $Cl([a,b]) = [a,b]$ لأن $[a,b]$ مغلقة في $\mathbb{R}$. إذن $m \in [a,b]$. لنفترض أن عنصر التغطية $\{U_i : i \in I\}$. الذي يحوي m هو U_{i_0} . لما كان هذا الجوار لـ m لا بد وأن يتقاطع مع A ، فثمة عنصر k من A . بحيث $k < m$. وبحيث $k \in U_{i_0}$. واستناداً الى تعريف A . هنالك تغطية جزئية منتهية لـ $[a,k]$ من التغطية المفتوحة $\{U_i : i \in I\}$. فإذا كانت هذه التغطية الجزئية هي $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$. فإننا نستنتج أن $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ تشكل تغطية جزئية منتهية لـ $[a,m]$ من التغطية المفتوحة $\{U_i : i \in I\}$ لـ $[a,b]$. فإذا أثبتنا أن $m = b$. فإننا نكون قد أتممنا البرهان على ما نبغي.في الحقيقة . إذا افترضنا مؤقتا أن $m < b$. فإن هنالك عناصر أكبر من m في $[a,b]$ محتواة في U_{i_0} . وهذا يعني أن هنالك عناصر من A أكبر من m (لأن لهذه العناصر التغطية $\{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ نفسها) . الأمر الذي لا يمكن أن يقع لأن $m = \sup A$. وبالتالي . فإن $m = b$.

وهكذا ، فإن (Y, D_2) فضاء متراص و E مجموعة مغلقة في هذا الفضاء . اذن E متراصة في هذا الفضاء الجزئي (Y, D_2) من $\mathbb{R}$ ، وبالتالي . فإن E متراصة في $\mathbb{R}$ (٣,٦٧) .■

توفر النظريتان الأخيرتان صفة مميزة بسيطة للمجموعات المتراصة في الفضاء $\mathbb{R}$. ذلك أنه يترتب عليهما أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ متراصة،هو أن تكون هذه المجموعة مغلقة ومحدودة . ورغم أن النظرية الأخيرة تتعلق بالفضاء $\mathbb{R}$،فهي تصح كذلك في $\mathbb{R}^n$. وبالتالي . فالصفة المميزة التي ذكرناها للمجموعات المتراصة

في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في الفضاءات $\mathbb{R}^n$. هذا . ولا توجد صفة مميزة بسيطة للمجموعات المتراصة في الفضاء المتري العام . لذا . يتوجب علينا أن نبحث في الصفات المميزة للمجموعات المتراصة في كل فضاء متري على حدة . هذا ، وغالباً ما تكون هذه المسألة غاية في التعقيد،إلا أنها واحدة من أهم المسائل في التحليل الرياضي .

٣,٦٩٥ — تعريف

يقال عن فضاء متري (X,D) إنه متراص بالتوالي . إذا حوت كل متوالية في X متوالية جزئية متقاربة .

سنورد الآن نظرية دون ان نقدم البرهان عليها . ومن الممكن أن يرجع القارىء مثلا إلى المرجع الذي يشغل الترتيب (17) في قائمة المراجع .

٣,٦٩٦ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتري متراصا هو أن يكون هذا الفضاء متراصا بالتوالي .

٣,٧ — الفضاءات المتصلة (المترابطة)

Connected Spaces

إذا رغبنا في تقديم تعريف بعيد عن الدقة الرياضية للفضاء المتصل . قلنا إنه فضاء متري مؤلف من " قطعة واحدة ". وبدرجة مماثلة من الدقة . يمكننا القول عن فضاء متري إنه غير متصل . إذا كان مؤلفا من " قطع منفصلة" إحداها عن الأخرى . وعلى هذا الأساس . فقد نَخَال مجموعة الأعداد الحقيقية R المزودة بمترك D فضاء متصلا . في حين نعتبر المجموعة $R-\{0\}$ المزودة بالتوبولوجيا النسبية فضاء غير متصل . بيد أن الأمر ليس كذلك . إذ سنرى أن كلا من هذين الفضاءين قد يكون متصلاً أو غير متصل . وذلك منوط بالتوبولوجيا التي نزود بها المجموعة R . وسنعكف في هذا البند على تقديم تعاريف رياضية دقيقة للفضاءات المتصلة وغير المتصلة . وإيجاد الخصائص الرئيسية لهذه الفضاءات لأهميتها البالغة بحد ذاتها . ولمساهمتها الفذة في تطوير بعض نواحي التحليل الرياضي وعلم الهندسة .

٣,٧١ — تعريف

يقال عن فضاء متري (X,D) إنه **متصل أو مترابط** . إذا لم تكن X إجتماعا لمجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين ومفتوحتين في X . وإذا لم يتحقق هذا الشرط . فإننا نقول إن (X,D) فضاء **غير متصل** . أي أن الفضاء غير المتصل (X,D) هو الذي يمكن أن يعبّر عنه بإجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين ومفتوحتين في X . هذا . ونقول عن مجموعة جزئية A من X إنها متصلة (غير متصلة) في X . إذا كان الفضاء الجزئي (A,D_A) متصلاً (غير متصل) .

٣,٧٢ — نتيجة

من الواضح . أنه إذا كان $X = U \cup V$. حيث U,V مجموعتان منفصلتان ومفتوحتان في X . فإن U , V مجموعتان مغلقتان أيضا في X . ويترتب على هذا . أن الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء (X,D) غير متصل (متصلا) . هو أن يكون (لا يكون) بالإمكان التعبير عن X بإجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين ومغلقتين في X .

٣,٧٣ — مثال

إن أي مجموعة وحيدة العنصر في فضاء متري (X,D) . لا بد وأن تكون متصلة .

٣,٧٤ — مثال

لنأخذ المجموعة الجزئية $Y = [-1,1[\cup]1,2]$ في الفضاء $\mathbb{R}$. لما كان $]-2,1[\cap Y = [-1,1[$ وكان $]1,3[\cap Y =]1,2]$. فإن المجموعتين الجزئيتين $]1,2]$ و $[-1,1[$ من Y مفتوحتان في Y (٣,٢٩٣) . ولما كانت هاتان المجموعتان فضلاً عن ذلك غير خاليتين ومنفصلتين ، فإن Y مجموعة جزئية غير متصلة في $\mathbb{R}$.

سنورد الآن نظرية تحدد بصورة تامة المجموعات الجزئية المتصلة في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$.

٣,٧٥ — نظرية

ليكن $\mathbb{R}$ فضاء الأعداد الحقيقية **المألوف** ولتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. إن الشرط اللازم والكافي كي تكون A متصلة هو أن تكون مجالاً .

البرهان

لنفترض أولاً أن A متصلة ، ولنثبت أنها مجال . لنسلم جدلاً أن ليست مجالاً . إذن هنالك أعداد ثلاثة x,y,z . بحيث $x<y<z$ ، وبحيث $x,z \in A$ و $y \notin A$. من الواضح . عندئذ أن $A = (A \cap]-\infty,y[) \cup (A \cap]y,+\infty[)$. ويترتب على هذا أن A اجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين (لأن $x \in A \cap]-\infty,y[$ و $z \in A \cap]y,+\infty[$) منفصلتين ومفتوحتين في A (٣.٢٩٣) . يعني هذا أن A غير متصلة خلافاً للفرض . إذن A لا بد وأن تكون مجالاً .

وبالعكس . لنفرض الآن A مجالاً . ولنثبت أن A متصلة . لنسلم جدلاً أن A غير متصلة ، إذن $A = U \cup V$. حيث U و V مجموعتان جزئيتان من A غير خاليتين ، منفصلتان ومغلقتان في A (٣.٧٢) . لذا . فهنالك نقطتان x,z من U,V على الترتيب (لأن U,V غير خاليتين) ، بحيث $x \neq z$ (لأن U,V منفصلتان) ، ويمكننا دون مس للعمومية افتراض أن $x<z$. لما كانت A مجالاً ، فإن $[x,z] \subseteq A$ ، كما أن كل عنصر من $[x,z]$ موجود في U أو في V . لنرمز بـ y للعنصر $y = \sup([x,z] \cap U)$. ان y موجود استناداً الى (٢.٥١)، ذلك أن المجموعة $[x,z] \cap U$ غير خالية (لأنها تحوي العنصر x على الأقل) ، ولأن هذه المجموعة محدودة من الأعلى بالعنصر z . لما كان أي جوار للحد الأعلى لمجموعة لا بد وأن يقاطع هذه المجموعة (لماذا) . فإن أي جوار لـ y في A لا بد وأن يتقاطع مع $[x,z] \cap U$. وبالتالي ، فإن أي جوار لـ y في A يجب أن يقاطع U ، وهذا يعني أن y عنصر من $Cl(U)$ في A . لكن U مغلقة في A ، إذن لا فرق بين U و $Cl(U)$ في A . الأمر الذي يترتب عليه أن $y \in U$. نستنتج من هذا أن $y<z$ ، ذلك أنه لوكان $y=z$ ، لوجدنا أن $y \in V$ (لأن $z \in V$) . وهذا لا يمكن أن يتم، لأن U,V منفصلتان . لنفترض الآن ε أي عدد موجب بحيث $y+\varepsilon<z$. إن $y+\varepsilon$ يجب أن ينتمي الى V ، ذلك أنه إذا لم يتم ذلك ، فإن $y+\varepsilon \in U$ ، وعندئذ نستنتج بأن $y+\varepsilon \in [x,z] \cap U$. وهذا يعني أن ثمة عنصرا $y+\varepsilon$ أكبر من y في المجموعة $[x,z] \cap U$ ، التي حدها الأعلى y ، وهذا غير ممكن . وبالتالي فإن $y+\varepsilon \in V$. ويترتب على هذا ، أن أي جوار لـ y في A لا بد وأن يتقاطع مع V ، وهذا يعني أن y عنصر من $Cl(U)$ في A .

لكن V مغلقة في A ، إذن لا فرق بين V و Cl(V) في A ، الأمر الذي يتعين عليه أن $y \in V$. ونكون بهذا قد وقعنا في تناقض ، ذلك أن $y \in U \cap V$ ، في حين أن $U \cap V = \emptyset$. وبالتالي ، فلا بد أن يكون المجال A مجموعة متصلة . وبذا يتم إثبات النظرية . ■

٣,٧٦ — نتيجة

(١) لما كانت المجموعة R هي المجال $]-\infty, +\infty[$ ، فإن الفضاء $\mathbb{R}$ متصل .

(٢) المجموعتان $R, \emptyset$ هما المجموعتان الجزئيتان الوحيدتان في $\mathbb{R}$ المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد .

البرهان

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ مفتوحة ومغلقة في آن واحد . عندئذ ، تكون $A, R-A$ مجموعتين منفصلتين مفتوحتين في $\mathbb{R}$ اجتماعهما يساوي R . ولما كان الفضاء $\mathbb{R}$ متصلاً ، فلا بد أن يكون $A = \emptyset$ أو $R - A = \emptyset$. أي إما $A = \emptyset$ أو $A = R$. ■

وتقدم النظرية التالية شرطاً كافياً كي يكون اجتماع جماعة من المجموعات الجزئية المتصلة في فضاء ما مجموعة متصلة .

٣,٧٧ — نظرية

لتكن $\{A_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعات الجزئية المتصلة في الفضاء المتري (X,D) . بحيث $\cap_i A_i \neq \emptyset$. عندئذ تكون $A = \cup_i A_i$ مجموعة جزئية متصلة في X .

البرهان

لنفترض جدلاً ، أن A مجموعة متصلة . إذن هنالك مجموعتان U,V مفتوحتان في X، بحيث تشكل $A \cap V$ و $A \cap U$ مجموعتين غير خاليتين منفصلتين اجتماعهما يساوي A . ليكن x عنصراً من $\cap_i A_i$. إذن $x \in A$. وبالتالي فإما $x \in U$ أو $x \in V$. لنفترض مثلاً $x \in U$. لنختر الآن عنصراً y من $A \cap V$. عندها يوجد عنصر i_0 من I بحيث $y \in A_{i_0}$. وبما أن $y \in A_{i_0} \cap V$ و $x \in A_{i_0} \cap U$، فإن المجموعتين $A_{i_0} \cap V$ و $A_{i_0} \cap U$ غير خاليتين . ولما كانت هاتان المجموعتان منفصلتين، وكانت U,V مفتوحتين في X ، فإن هذا يقتضي أن A_{i_0} غير متصلة . وبذا نكون قد وصلنا إلى تناقض . وبالتالي ، فلا يمكن أن تكون A إلاّ متصلة في X . ■

إن كل فضاء متري لا بد وأن يحوي مجموعات جزئية متصلة (٣.٧٣) . وسنبين بأنه يمكن تجزئة الفضاء المتري الى جماعة من المجموعات المتصلة الأعظمية غير المتقاطعة . ولما كانت معرفة هذه المجموعات أمراً بالغ الأهمية لدى دراسة البنية الشاملة للفضاء المتري ، فقد برز مفهوم ما يسمى بالمركبات .

٣,٧٨ — تعريف

ليكن (X,D) فضاء مترياً و A مجموعة جزئية من X . نقول عن A إنها **مركّبةٌ** لـ X ، إذا كانت مجموعة متصلة أعظمية في X . أي إذا كانت A مجموعة جزئية متصلة في X ، وغير محتواة في أية مجموعة جزئية متصلة أخرى في X .

٣,٧٩ — نظرية

إن كل نقطة x في فضاء متري (X,D) محتواة في مركبة واحدة فقط لـ X .

البرهان

لتكن x نقطة من X . ولتكن $\{A_i\}, i\in I$ جماعة كل المجموعات المتصلة في X . والتي تحوي x . إن هذه الجماعة غير خالية . لأن $\{x\}$ نفسها متصلة (٣.٧٣) . واستناداً إلى النظرية (٣.٧٧) فإن $A = \bigcup_i A_i$ مجموعة جزئية متصلة في X تحوي x . من الواضح أن A أعظمية . وبالتالي فهي مركّبة لـ X . ذلك أن كل مجموعةٍ جزئيةٍ متصلةٍ في X حاويةٍ لـ A هي إحدى المجموعات A_i . وهي بالتالي محتواة في A . لنبين أخيراً أن A هي المركبة الوحيدة لـ X التي تحوي x . إذا افترضنا جدلاً أن B مركّبة أخرى لـ X تحوي x . فمن الواضح أن B يجب أن تكون إحدى المجموعات A_i . وبالتالي فإن B محتواة في A . لكن B أعظمية باعتبارها مجموعة جزئية متصلة في X . إذن $B=A$. ■

٣,٧٩١ — نظرية

تشكل مجموعة المركبات في فضاء متري (X,D) تجزئة لـ X . أي أنه إذا كانت $\{A_i\}, i\in I$ جماعة المركبات لـ X . فإن $A_i \cap A_j = \varnothing$ أياً كان العنصران المختلفان i,j من I . ثم إن $X = \bigcup_i A_i$.

البرهان

لما كانت كل نقطة من X محتواةً في مركبة لـ X وفق النظرية السابقة . فإن $X = \bigcup_i A_i$. إذا افترضنا جدلاً أنه عندما $i\neq j$ فإن $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. لاستنتجنا أن $A_i \cup A_j$ مجموعة جزئية متصلة في X تحوي كلاً من A_i , A_j . لكن هذا يناقض كون كلٍّ من A_i , A_j مجموعة أعظمية . وبالتالي . فإن $A_i \cap A_j = \varnothing$ عندما $i\neq j$. ■

سنختتم هذا البند بوصف المجموعات المفتوحة في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$، وذلك من خلال النظرية التالية .

٣,٧٩٢ — نظرية

كل مجموعة مفتوحة U في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$ هي اجتماع قابل للعد من المجالات المفتوحة والمنفصلة .

البرهان

إن U (باعتبارها فضاء جزئياً من $\mathbb{R}$) هي اجتماع كل مركباتها (٣.٧٩١) . ولما كانت مركبات U مجموعات متصلة في $\mathbb{R}$ (لماذا ؟) . فإن هذه المركبات مجالات (٣.٧٥) . سنبين الآن أن هذه المجالات لا بد وأن تكون مفتوحة . ليكن I أحد هذه المجالات،ولتكن x_o نقطة من I . بما أن $I \subseteq U$ ، فإن $x_o \in U$ ولما كانت U مفتوحة في $\mathbb{R}$، فثمة كرة مفتوحة $N(x_o,\varepsilon) =]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[$ محتواة في U . وبما أن المجال $]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[$ متصل،وأن هذا المجال يقاطع I (لإشتراكهما بـ x_o) . فإن $]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[\cup I$ مجموعة جزئية متصلة في U. لكن I .مركبة لـ U . إذ لا بد أن يكون $I =]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[\cup I$. الأمر الذي ينتج عنه أن $]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[\subseteq I$. وهكذا نكون قد وجدنا أنه أياً كان العنصر x_o من I فثمة كرة مفتوحة $]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[$ مركزها x_o محتواة في I . وهذا يعني أن I مجال مفتوح .

إن جماعة المجالات المفتوحة والمنفصلة ح ، التي إجتماعها يساوي U هي جماعة قابلة للعد . وفي الحقيقة . فإن $U \cap Q$ مجموعة قابلة للعد . كما أن كل مجالٍ من مركبات U يحوي عنصراً من $U \cap Q$. لذا فإن الدالة $f : U \cap Q \to$ ح ،التي تقابل كل عنصر p من $U \cap Q$ بمجال من ح يحوي p دالة غامرة . الأمر الذي يترتب عليه أن ح مجموعة قابلة للعد . ■

تمارين

الفضاءات المترية

(٣ — ١)

ليكن D متركاً على مجموعة X ، وليكن k عدداً موجباً ما . فإذا كان

$$D_1(x,y) = k\,D(x,y) \qquad \text{و} \qquad D_2(x,y) = \frac{D(x,y)}{1+D(x,y)}$$

أياً كان x,y من X ، فأثبت أن كلاً من D_1 , D_2 يشكل متركاً على X .

(٣ — ٢)

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، ولنعرف دالة حقيقية D' كما يلي : أياً كان العنصران $x = (x_1,x_2)$ و $y = (y_1,y_2)$ من $X \times X$ ، فإن $D'(x,y) = D(x_1,y_1) + D(x_2,y_2)$

تحقق من أن D' يشكل متركاً على $X \times X$.

(٣ — ٣)

لتكن $D : X \times X \to R$ دالة تحقق ما يلي :

(i) أياً كانت العناصر x,y,z من X ، فإن $D(z,x) + D(z,y) \geq D(x,y)$.

(ii) الشرط اللازم والكافي كي يكون $x = y$ هو أن يكون $D(x,y) = 0$.

برهن أن D يمثل متركاً على X .

(٣ — ٤)

لتكن $\{D_n\}, n \in N$ متوالية من دوالّ المسافة (المتارك) على مجموعة X . أثبت عند ذلك ما يلي :

(i) إذا كان M عدداً صحيحاً موجباً ما ، فإن $\sum_{n=1}^{M} D_n$ يشكل متركاً على X .

(ii) إذا كان $D_n(x,y) < 1$ أياً كان x,y من X ، وأياً كان n من N ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{2^n}$ يشكل متركاً أيضاً على X .

(٣ — ٥)

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، ولتكن $D_1 : X \times X \to R$ دالة محددة بالدستور

$$D_1(x,y) = \min\{D(x,y), 1\}$$

برهن أن D_1 تشكل متركاً على X .

(٣ — ٦)

ليكن $p \geq 1$ ، ولنعرف الدالة $D_p : R^2 \times R^2 \to R$ بالدستور

$$D_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p}$$

برهن أن D_p مترك على R^2 .

(**إرشاد** : استخدم متراجحة **منكوفسكي** « Minkowski » التالية : إذا كان p عدداً عادياً أكبر من 1 . وكانت $a_1, \ldots, a_n ; b_1, \ldots, b_n$ اعداداً حقيقية غير سالبة . فإن

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

المجموعات المفتوحة

(٣ — ٧)

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، و x عنصراً من X . برهن أن متممة المجموعة $\{x\}$ مجموعة مفتوحة . وبوجه عام . أثبت أن متممة أي مجموعة منتهية من عناصر X هي مجموعة مفتوحة .

(٣ — ٨)

لتكن D' دالة حقيقية على $R^n \times R^n$ معرفة بالدستور

$$D(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

حيث $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.لنرمز للمترك الإقليدي (المترك المألوف) على R^n بـ D .

(أ) برهن أن D' مترك على R^n .

(ب) بين وجود عددين موجبين a,b بحيث يكون : $aD'(x,y) \leq D(x,y) \leq bD'(x,y)$ أياً كان x,y من R^n .

(جـ) أثبت أن المتركين D, D' **متكافئان** . أي أن المجموعات المفتوحة في الفضاءين المتريين (R^n, D) و (R^n, D') واحدة .

(٣ — ٩)

بين أن الشرط اللازم والكافي كي تكون كل مجموعة جزئية في فضاء متري مفتوحة . هو أن تكون كل مجموعة جزئية وحيدة العنصر مفتوحة .

(٣ — ١٠)

تحقق من أن المجال $]0,1]$ لا يشكل مجموعة مفتوحة في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$. في حين أنه يشكل مجموعة مفتوحة في الفضاء المؤلف من المجموعة $[0,1]$ المزودة بالمترك النسبي على $[0,1]$ الناتج من المترك المألوف .

(٣ — ١١)

لتكن A, B مجموعتين جزئيتين مفتوحتين في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$. برهن أن $A \times B$ لا بد أن تكون مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء الإقليدي ذي البعدين $\mathbb{R}^2$. بين أنه إذا كانت Y مجموعة جزئية مفتوحة في $\mathbb{R}^2$. وكان y_0 عدداً حقيقياً ما . فإن $\{x : (x, y_0) \in Y\}$ لا بد وأن تكون مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.

(٣ — ١٢)

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية محدودة من الأعلى . ومفتوحة في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$. برهن عندئذ أن $\sup A \notin A$.

أورد نتيجة مماثلة عندما تكون للمجموعة A نفس الصفات،باستثناء أنها محدودة من الأدنى عوضاً عن كونها محدودة من الأعلى .

المجموعات المغلقة

(٣ — ١٣)

ليكن (X, D) فضاء مترياً و $\{F_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعات الجزئية المغلقة في (X, D) . ولنفرض تحقق الخاصة التالية : يقابل كل عنصر x من X عدد موجب p، بحيث تقاطع الكرة المفتوحة $N(x, p)$ عدداً منتهياً من المجموعات F_i . برهن أن $\cup_i F_i$ مجموعة مغلقة .

(٣ — ١٤)

بين أن N مجموعة مغلقة في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$. في حين أن $\{\frac{1}{n} : n \in N\}$ ليست كذلك . تحقق أيضاً من أن المجموعتين $]0,1]$ و $[0,1[$ ليستا مفتوحتين ولا مغلقتين في $\mathbb{R}$.

(٣ — ١٥)

لتكن A,B مجموعتين جزئيتين مغلقتين في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$. برهن أن $A \times B$ لا بد وأن تكون مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء الإقليدي ذي البعدين $\mathbb{R}^2$. (قارن مع المسألة ٣ — ١١) . لاحظ أنه إذا كانت Y مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}^2$ ، فليس من الضروري أن تكون المجموعة $\{x : (x,y) \in Y\}$ مغلقة في $\mathbb{R}$. وتقدم المجموعة $Y = \{(x,y) : xy = 1\}$ مثالاً على ذلك .

مجموعات أخرى في الفضاءات المترية

(٣ — ١٦)

ليكن $\mathbb{R}$ فضاء الأعداد الحقيقية المألوف . ولتكن

$$A = [0,1] \text{ و } B =]0,1] \text{ و } C =]0,1[\text{ و } E = \{\frac{1}{n} : n \in N\} \text{ و } F = N$$

أوجد لصاقة وداخل كلٍّ من هذه المجموعات . ثم أوجد المجموعة المشتقة لكل منها .

(٣ — ١٧)

شكل مجموعة جزئية محدودة في $\mathbb{R}$ لها ثلاث نقاط حدية .

(٣ — ١٨)

شكل مجموعة جزئية محدودة في $\mathbb{R}$ مجموعة نقاطها الحدية قابلة للعد اللامنتهي .

(٣ — ١٩)

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، و A,B مجموعتين جزئيتين من X . برهن على صحة ما يلي :

(i) $Cl(\varnothing) = \varnothing$.

(ii) $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$

(iii) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$.

(iv) $Int(X) = X$.

(v) $Int(Int(A)) = Int(A)$.

(vi) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

(vii) إذا افترضنا أن $A \subseteq B$ فأثبت أن

$$Cl(A) \subseteq Cl(B) \quad \text{و} \quad Int(A) \subseteq Int(B) \quad \text{و} \quad D(A) \subseteq D(B)$$

(٣ — ٢٠)

ليكن (X,D) فضاء مترياً و $A \subseteq X$. برهن أنه إذا كانت كل مجموعة جزئية من A مغلقة في X . فلا يمكن أن توجد في X نقاط حدية لـ A .

(٣ — ٢١)

ليكن (X,D) فضاء مترياً و A مجموعة جزئية من X كثيفة في (X,D) . برهن أن أي مجموعة مفتوحة U في X . لا بد أن تحقق الشرط $Cl(U) = Cl(A \cap U)$

المتواليات المتقاربة والفضاءات التامة

(٣ — ٢٢)

لنأخذ الفضاء الإقليدي ذي البعدين $\mathbb{R}^2$، ولنختر المتواليات التالية في $\mathbb{R}^2$:

$$\{(\frac{1}{n}, 2)\} \quad \text{و} \quad \{(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})\} \quad \text{و} \quad \{(3+\frac{1}{n^2}, 1+\frac{(-1)^n}{n})\}$$

تحقق من أن هذه المتواليات متقاربة من $(3,1)$ و $(0,1)$ و $(0,2)$ على الترتيب .

(٣ — ٢٣)

ليكن (X,D) فضاء مترياً و $\{x_n\}$ متوالية متقاربة في هذا الفضاء من x . برهن أن كل متوالية جزئية من $\{x_n\}$. لا بد أن تتقارب من x أيضاً .

(٣ — ٢٤)

ليكن (X,D) فضاء مترياً ، ولتكن $\{y_n\}$ و $\{x_n\}$ متواليتين فيه ، بحيث $x_n \to x, y_n \to y$. برهن أن المتوالية الحقيقية $\{D(x_n, y_n)\}$ تتقارب من $D(x,y)$ في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$.

(٣ — ٢٥)

ليكن (X,D) فضاء مترياً يتمتع بالخاصة التالية : أياً كان x من X فإن {x} مجموعة مفتوحة . برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المتوالية $\{x_n\}$ متقاربة في (X,D)، هو أن يوجد عدد صحيح موجب M . بحيث يكون $x_{M+1} = x_{M+2} = \cdots$. أي أن تكون $\{x_n\}$ ثابتة بدءاً من نقطة معينة .

(٣ — ٢٦)

ليكن (X,D) فضاء مترياً تاماً ولتكن $A \subseteq X$. برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون A مجموعة جزئية مغلقة في X هو أن يكون الفضاء الجزئي (A, D_A) فضاء مترياً تاماً .

(٣ — ٢٧)

ليكن (X,D) فضاء مترياً و $\{x_n\}$ متوالية في X ، وليكن $a \in X$. أثبت ما يلي :

(i) الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \to a$. هو أن تتقارب المتوالية $\{D(x_n, a)\}$ من 0 في $\mathbb{R}$.

(ii) إذا كانت $\{y_n\}$ متوالية أخرى في X ، وكان $x_n \to a$ ، فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون $y_n \to a$ هو أن تتقارب المتوالية $\{D(x_n, y_n)\}$ من 0 في $\mathbb{R}$.

نظرية النقطة الثابتة

(٣ — ٢٨)

بين أنه إذا كان (X,D) فضاء مترياً تاماً . وكانت $\varphi : X \to X$ دالة تقليص ، فبرهن أنه في نطاق المصطلحات الواردة في النظرية (٣.٥٩٦) . يكون : $D(x_n, x_0) \leqslant \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} D(x_0, x_1)$

(٣ — ٢٩)

ليكن a عدداً موجباً ، ولتكن الدالة $\varphi : [\sqrt{a}, +\infty[\to \mathbb{R}$ محددة بالدستور $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$

تحقق من أن φ هي دالة تقليص على الفضاء المتري التام $[\sqrt{a}, +\infty[$. ثم حدد نقطتها الثابتة .

الفضاءات المتراصة

(٣ — ٣٠)

ليكن $I_n =]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$ أياً كان n من N . بين أن $\{I_n : n \in N\}$ تشكل تغطية مفتوحة للمجال $I =]0,1[$. بين كذلك ، أنه لا يمكن أن نجد مجموعة جزئية منتهية من المجالات I_n بحيث تشكل تغطية لـ I .

(٣ — ٣١)

عين المجموعات الجزئية المتراصة في الفضاء المتري المنقطع .

(٣ — ٣٢)

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية من فضاء متري منقطع متراصة . هو أن تكون منتهية .

(٣ — ٣٣)

لنزود Q بمترك الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}$ ، بين أن المجموعة $\{x \in Q : 2 < x^2 < 3\}$ ليست متراصة،رغم أنها مغلقة ومحدودة في Q .

(٣ — ٣٤)

لتكن A مجموعة جزئية متراصة في الفضاء المتري (X,D) . فإذا كانت B مجموعة جزئية من A ومغلقة في X . فبين أن B متراصة .

(٣ — ٣٥)

إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين متراصتين في الفضاء المألوف $\mathbb{R}$ ، فإن $A \times B$ مجموعة متراصة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^2$. وإذا كانت Y مجموعة جزئية متراصة في $\mathbb{R}^2$. وكان y_0 عدداً حقيقياً ما . فإن $\{x : (x, y_0) \in Y\}$ مجموعة جزئية متراصة في $\mathbb{R}$.

(٣ — ٣٦)

إذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $A \subseteq \mathbb{R}$. فإننا نعرف

$$x + A = \{x + y : y \in A\}$$

أثبت صحة كل من دعاوى التكافوء التالية :

(أ) الشرط اللازم والكافي كي تكون A مفتوحة . هو أن تكون $x+A$ مفتوحة .

(ب) الشرط اللازم والكافي كي تكون A مغلقة . هو أن تكون $x+A$ مغلقة .

(جـ) الشرط اللازم والكافي كي تكون A متراصة . هو أن تكون $x+A$ متراصة .

الفضاءات المتصلة

(٣ — ٣٧)

بين أن كلاً من المجموعات الجزئية التالية غير متصلة في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$:

(أ) كل مجموعة جزئية منتهية .

(ب) $]-2,1] \cup [1,3] \cup]4,5]$

(جـ) مجموعة الأعداد غير العادية .

(د) $\{x : x = \frac{1}{n}$ أو $x = 0\}$. وذلك بفرض $n \in N$.

(٣ — ٣٨)

بين أن المجموعات المتصلة الوحيدة في فضاء منقطع هي تلك التي تحوي عنصراً واحداً .

(٣ — ٣٩)

برهن على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون (X,D) فضاء مترياً متصلاً هو التالي : أياً كانت النقطتان في X . فثمة مجموعة جزئية متصلة تحوي كلاً من هاتين النقطتين .

(٣ — ٤٠)

بين أن متممة أي مجموعة مغلقة في فضاء متري . هي اجتماع جماعة قابلة للعد من المجالات المفتوحة والمنفصلة .

(٣ — ٤١)

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون (X,D) فضاء متصلاً . هو أن تكون $X,\emptyset$ المجموعتين الجزئيتين الوحيدتين في X المفتوحتين والمغلقتين في آن واحد .



الفصل الرابع

النهايات

Limits

عرّفنا في الفصل الثالث نهاية المتوالية $n \in N$ ، $\{x_n\}$ في فضاء متري (X,D) . أي نهاية دالة ساحتها مجموعة الأعداد الطبيعية N ،ومداها محتوى في فضاء متري (X,D) . كذلك ، لا ريب في أن القارىء قد عرض لموضوع نهايات الدوال الحقيقية للمتحول الحقيقي عند دراسته لمبادىء علم الحساب التفاضلي والتكاملي .

إن هدفنا من هذا الفصل هو إيراد التعريف العام لنهاية دالة ساحتها ومداها فضاءان متريان ليسا بالضرورة حقيقيين . ومن ثم الانتقال إلى دراسة نهايات الدوال الحقيقية بشيء من الإسهاب . ذلك أن هذه الدوال تشكل عماد التحليل الحقيقي . وسنختتم فصلنا هذا بدراسة نهايات المتواليات الحقيقية . ورغم أن المتواليات الحقيقية ليست كما سبق وذكرنا سوى نمط معين من الدوال الحقيقية ، إلا أنها تشكل أداة فعالة وبالغة الأهمية لدى التصدي للعديد من معضلات التحليل الحقيقي .

على الرغم ، من أننا سنورد الآن تعريفاً لنهاية الدالة،يختلف في الظاهر عن تعريفنا لنهاية المتوالية الذي سبق وقدمناه في (٣.٥١) ، فإن التحليل الدقيق لهذين التعريفين يمكننا،في مرحلة قادمة،من التيقن بوجود رابطة عضوية بينهما ، بحيث يستمدان فكرتيهما من أصل واحد .

٤،١ — نهايات الدوال من فضاء متري إلى آخر

Limits of Functions from a Metric Space into Another

٤،١١ — تعريف

ليكن (X,D) و (Y,D') فضاءين متريين و S مجموعة جزئية من X و f دالة ساحتها S ومداها في Y . لتكن x_o نقطة حدية لـ S و l نقطة من Y . نقول إن f **تسعى** الى l عندما يسعى x إلى x_o (أوإن نهاية الدالة f في النقطة x_o تساوي l) ، ونكتب $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ (أو نكتب $f(x) \to l$ عندما $x \to x_o$)، إذا قابل كل عدد موجب ε عدد موجب δ (تابع في الحالة العامة لـ x_o, ε)، بحيث أنه إذا كان x عنصراً ما من S يحقق الشرط $0 < D(x,x_o) < \delta$ ،فإن $D'(f(x),l) < \varepsilon$. وبعبارة أخرى ، فإن $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ ، إذا قابل كلّ كرة مفتوحة $N(l,\varepsilon)$ مركزها l في Y ،كرةٌ مفتوحة $N(x_o,\delta)$ مركزها x_o في X ،بحيث أنه إذا كان x عنصراً ما من $N'(x_o,\delta) \cap S$ ،فإن $f(x)$ عنصر من $N(l,\varepsilon)$.

٤،١٢ — ملاحظات

نُذَكِّر أننا نقصد بالكرة المفتوحة المحذوفة المركز $N'(x_o,\delta)$ المجموعة $N(x_o,\delta) - \{x_o\}$ (٣،٢١) . هذا ، وقد اشترطنا في التعريف السابق ضرورة انتماء x إلى $N'(x_o,\delta) \cap S$ بدلاً من $N'(x_o,\delta)$ ، للتأكيد على لزوم انتماء x إلى ساحة الدالة f . كذلك ، فقد اشترطنا انتماء x_o إلى مجموعة النقاط الحدية S' للمجموعة S ،كي نضمن عدم خلو المجموعة $N'(x_o,\delta) \cap S$.

٤،١٣ — مثال

لتكن f دالة ساحتها المجموعة الجزئية S من الفضاء المتري (X,D) ومداها في (Y,D') ،بحيث $f(x) = c$ أيا كان x من S (أي أن f دالة ثابتة) . لنفترض x_o نقطة حدية S . فإذا كان ε عدداً موجباً ما ، فإن $D'(f(x),c) = 0 < \varepsilon$ أياكان x من S . وبالتالي ، فإذاكان x عنصراً من S يحقق الشرط $0 < D(x,x_o) < \delta$ (حيث يمكن افتراض δ أي عدد موجب) ، فإن $D'(f(x),c) < \varepsilon$. إذن نستنتج من (٤،١١) أن $\lim_{x \to x_o} f(x) = c$.

٤،١٤ — نظرية

إذاكانت النهاية $\lim_{x \to x_o} f(x)$ موجودة ، فإنها وحيدة .

البرهان

إذا افترضنا جدلاً وجود نهايتين مختلفتين للدالة f هما l,m ، كان العدد $\varepsilon = \frac{1}{2} D'(l,m)$ موجباً . ومن الواضح عندئذ أن $N(l,\varepsilon) \cap N(m,\varepsilon) = \emptyset$. يترتب على التعريف (٥,١١) ، أن ثمة كرتين مفتوحتين $N(x_o,\delta_1)$ و $N(x_o,\delta_2)$ ، بحيث يكون خيال أي عنصر من $N'(x_o,\delta_1) \cap S$ وفق f واقعاً في $N(l,\varepsilon)$ ، وخيال أي عنصر من $N'(x_o,\delta_2) \cap S$ واقعا في $N(m,\varepsilon)$. فإذا افترضنا أن δ_1 مثلا هو أصغر العددين δ_1,δ_2 ، فإننا نستنتج أن خيال أي عنصر من $N'(x_o,\delta_1) \cap S$ يقــع في $N(m,\varepsilon)$ و $N(l,\varepsilon)$ في آن واحــد ، أي يقــع في $N(l,\varepsilon) \cap N(m,\varepsilon)$. ولما كــان $N'(x_o,\delta_1) \cap S \neq \emptyset$ (بسبب كون x_o نقطة حدية لـ S) ، فإننا نستنتج أن $N(l,\varepsilon) \cap N(m,\varepsilon) \neq \emptyset$ ، ونكون بهذا قد وقعنا في تناقض . إذن لا بد من كون النهاية $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ وحيدة . ■

٤,١٥ — نظرية

ليكن (X,D) و (Y,D') فضاءين متريين و S مجموعة جزئية من X و x_o نقطة حدية لـ S . لتكن f دالة ساحتها S ومداها في Y .لنفترض $\{x_n\}, n \in N$ متوالية عناصرها تنتمي إلى S ، بحيث أن $x_n \neq x_o$ أياكان n من N ، وبحيث يكون $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o$ (٣,٥١) . عندئذ :

(١) إذا كان $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$

(٢) إذا وجدت النهاية $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ من أجل كل متوالية $\{x_n\}, n \in N$ متقاربة من x_o ، فإن لكل المتواليات $\{f(x_n)\}, n \in N$ نهاية واحدة (ولتكن l مثلاً) ، وعندئذ تكون النهاية $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ موجودة وتساوي l .

البرهان

(١) لنفترض أن $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$ ، وأن $\{x_n\}, n \in N$ متوالية عناصرها في S متقاربة من x_o ، حيث $x_n \neq x_o$ أيا كان n من N . لما كان $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$ ، فإنه يقابل العدد الموجبَ الاختياري ε عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من $N'(x_o,\delta) \cap S$ ، فإن $f(x) \in N(l,\varepsilon)$. وبما أن $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o$ ، فهنالك عدد طبيعي M ، بحيث أنه إذا كان n أي عدد صحيح موجب يحقق المتراجحة $n > M$ ، فإن $x_n \in N(x_o,\delta)$. ولما كانت عناصر المتوالية كلها في S ، وكان $x_n \neq x_o$ أيا كان n من N ، فإننا نستنتج أن $n > M$ تقتضي $x_n \in N'(x_o,\delta) \cap S$. وهكذا نكون قد وجدنا أن ثمة عدداً طبيعياً M ، بحيث أنه إذا كان $n > M$ ، فإن $f(x_n) \in N(l,\varepsilon)$ ، وهذا يعني تعريفاً (٣,٥١) أن $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

(٢) لتكن $\{v_n\}$ ، $\{u_n\}$ متواليتين في S بحيث $u_n \neq x_o \neq v_n$ أيـا كـان n من N وبحيث $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = x_o$. سنبين الآن أنه إذا كان $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = u$ ، و $\lim_{n\to\infty} f(v_n) = v$ ، فإن $u = v$.

لنفترض جدلاً ، أن $u \neq v$ ، ولنأخذ متوالية جديدة $\{x_n\}, n \in N$ معرّفة على النحو التالي :

$$x_n = \begin{cases} u_n & \text{(عندما يكون n زوجياً)} \\ v_n & \text{(عندما يكون n فردياً)} \end{cases}$$

من الواضح أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$ ،وبالتالي فإن النهاية $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ موجودة فرضاً . بيد أن هذا الأمر لا يمكن أن يتم (لماذا ؟) ؛ لذا لا بد أن يكون $u = v$ ، وسنرمز لقيمتها المشتركة بـ l . سنوضح الآن أن $\lim_{x\to x_o} f(x)$ موجودة وتساوي l . لنفترض مؤقتاً أن الأمر ليس كذلك . عندئذ هنالك كرة مفتوحة $N(l, \varepsilon_o)$ مركزها l ، بحيث أنه إذا كان δ أي عدد موجب،فهنالك عنصر x من S محتوى في $N'(x_o, \delta)$ ، يكون من أجله $f(x) \notin N(l, \varepsilon_o)$. لنأخذ متوالية الأعداد $\{\frac{1}{n}\}, n \in N$ ، ولنشكل في X متوالية $\{x_n\}, n \in N$ ، بحيث $x_n \in N'(x_o, \frac{1}{n}) \cap S$ ، وبحيث $f(x_n) \notin N(l, \varepsilon_o)$.

من السهل ، التحقق بأن $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$ و $x_n \neq x_o$ أيا كان n من N، في حين أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$.ولما كان هذا مناقضاً للفرض ، فلا بد أن يكون $\lim_{x\to x_o} f(x) = l$ ، وبذا يتم البرهان . ■

وهكذا وجدنا أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\lim_{x\to x_o} f(x) = l$ هو أن يقابل كل متوالية $\{x_n\}, n \in N$، عناصرها مختلفة جميعاً عن x_o ومتقاربة من x_o ، متوالية $\{f(x_n)\}, n \in N$ متقاربة من l . وبذا نجد أسلوباً جديداً للبحث عن نهاية دالة،هو ذاك الذي يستخدم المتواليات . وفي العديد من المسائل يكون تطبيق الأسلوب المباشر غاية في الصعوبة ، الأمر الذي يدفعنا إلى تطبيق أسلوب المتواليات . بل أننا نستطيع القول بأنه في كثير من الأحيان ، التي نحاول فيها استخدام الأسلوب المباشر ، نجد أنفسنا مضطرين لتشكيل متوالية والانتقال إلى الأسلوب الآخر .

٤,١٦ — مثال :

لنأخذ الدالة الحقيقية $x \to \sin x^{-1}$ ، التي ساحتها $S = R - \{0\}$،ولنثبت أن $\lim_{x\to 0} \sin x^{-1}$ ليست ذات معنى ، أي غير موجودة . يكفي لبلوغ هذا الهدف،استناداً إلى النظرية السابقة ، إيجاد متوالية $\{x_n\}, n \in N$ ، بحيث يكون $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ، $x_n \neq 0$ ، أياً كان n من N ، بحيث تكون المتوالية $\{\sin x_n^{-1}\}, n \in N$ غير متقاربة . إن هذا أمر متوقع بسبب اهتزاز $\sin x^{-1}$ بين 1 و1– عند اقتراب x من 0 . وبوجه خاص ، فإن $\sin x^{-1} = 1$ عندما $x^{-1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي عندما $x = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ ، كما أن $\sin x^{-1} = -1$ عندما $x^{-1} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$، أي عندما $x = \frac{2}{(4k+3)\pi}$ ، وذلك بفرض $k = 0, 1, 2, \ldots$. لنشكل متوالية عناصرها مأخوذة من القيمتين السابقتين لـ x على التوالي ، فنجد المتوالية $\{x_n\}, n \in N$ حيث $x_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$. من الواضح ، أن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. سنبين الآن أنه لا توجد نهاية للمتوالية

$\{\sin x_n^{-1}\}, n\in N$. وفي الحقيقة ، إذا افترضنا جدلا وجود نهاية l لهذه المتوالية ، فإن $l\neq \pm 1$ ، ذلك أن الجوار $]0,2[$ للعدد 1 يستثني عددا غير منته من عناصر المتوالية هي $\sin x_k^{-1}, k = 2,4,6,\ldots$. كذلك فإن الجوار $]-2,0[$ للعدد -1 يستثني عدداً غير منته من عناصر المتوالية هي $\sin x_m^{-1}, m = 1,3,5,\ldots$. بقي علينا ، التحقق من أن أي عدد a يختلف عن ± 1 لا يمكن أيضاً أن يكون نهاية لهذه المتوالية . في الحقيقة ، إذا رمزنا بـ ε للمقدار الموجب $\min\{|a+1|,|a-1|\}$ ، فإن الجوار $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$ لا يحوي أيا من عناصر المتوالية $\{\sin x_n^{-1}\}, n\in N$ ، لأن عناصر هذه المتوالية إما $+1$ أو -1 . وبالتالي ، نكون قد أثبتنا أنه أيا كان العدد a ، فلا يمكن أن يكون نهاية للمتوالية $\{\sin x_n^{-1}\}, n\in N$ وهكذا . نكون قد وجدنا متوالية $\{x_n\}, n\in N$ متقاربة من 0 ، دون أن توجد نهاية للمتوالية $\{\sin x_n^{-1}\}, n\in N$ ، وهذا يعني استناداً إلى النظرية (٤.١٥) أن $\lim_{x\to 0} \sin x^{-1}$ غير موجودة .

هذا ، ولو رغبنا في اتباع الأسلوب المباشر لحل هذه المسألة ، لتعين علينا إثبات أنه أيا كان العدد الحقيقي l ، فهنالك عدد حقيقي موجب ε ، بحيث أنه إذا كان δ أي عدد موجب ، فمن الممكن إيجاد عدد x يحقق الشرط $0<|x-0| = |x| < \delta$ ، بحيث يكون $|\sin x^{-1} - l| \geqslant \varepsilon$. وواضح من صياغة أسلوب الحل صعوبة المركب الخشن الذي علينا ركوبه لبلوغ الحل . ويبدو أنه لا مفر لنا في نهاية المطاف من استخدام المتواليات .

وعلى الرغم من هذا ، فقد أثبت الأسلوب المباشر ، الذي يمكن تسميته بأسلوب الجوارات .بأنه أكثر ملاءمة في الأبحاث النظرية . وفضلاً عن ذلك ، فإن أسلوب المتواليات يغدو عقيما عند دراسة التحليل الرياضي في فضاءات أعم من الفضاءات المترية ، تدعى بالفضاءات التوبولوجية ، ذلك أن مفهوم المتوالية نفسها في هذه الفضاءات **يفقد معناه**، الأمر الذي دعا علماء الرياضيات إلى تعميم مفهوم المتوالية نفسها ، واستحداث ما يسمى بالشبكات والمرشحات .

بالإضافة الى المفهوم العادي للنهاية ، الذي اقتصرنا عليه حتى الآن ، فثمة نهاية من نمط مختلف نورد تعريفها فيما يلي.

٤.١٧ — تعريف

لتكن f دالة من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D')، ولتكن E مجموعة جزئية من الساحة S للدالة f ، و x_o نقطة حدية لـ E . عندئذ نقول إن **f تسعى إلى l عندما يسعى x إلى x_o في E** ، إذا كانت l نهاية مقصور f على E عندما يسعى x إلى x_o . وبعبارة أخرى ، فإن f تسعى الى l عندما يسعى x إلى x_o في E ، إذا قابل كل كرة مفتوحة $N(l,\varepsilon)$ كرة مفتوحة $N(x_o,\delta)$ ، بحيث أنه إذا كان $x\in N'(x_o,\delta)\cap E$ ، فإن $f(x)\in N(l,\varepsilon)$. هذا ، ومن الممكن الرمز إلى هذه النهاية بالشكل « $\lim_{x\to x_o \text{ في } E} f(x) = l$ » ، أو بالشكل « $f(x)\to l$ عندما $x\to x_o$ في E » .

٤,٢ — نهايات الدوال الحقيقية على فضاء متري

Limits of Real Functions on a Metric Space

درسنا في البند السابق (٤,١) نهايات الدوال من فضاء متري إلى آخر . وفي هذا البند ، سنقتصر على بحث نهايات الدوال الحقيقية ، التي تشكل صلب التحليل الحقيقي . لما كان فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$ فضاء مترياً خاصاً ، فإن كل التعاريف والنظريات الواردة في البند السابق ، تسري بالطبع على الدوال الحقيقية . بيد أن الدوال الحقيقية تتمتع بصفات تختص بها دون غيرها من الدوال . ولهذا السبب ، أفردنا لها هذا البند .

نستنتج من التعريف العام لنهاية دالة (٤,١١) ، التعريف التالي لنهاية دالة حقيقية (لمتغير حقيقي أو غيره) .

٤,٢١ — تعريف

لتكن f دالة حقيقية ساحتها S (ليس من الضروري أن يكون $S \subseteq R$) ، ولتكن x_o نقطة حدية لـ S . نقول إن $\lim_{x\to x_o} f(x) = l$ ، إذا قابل كلَّ عدد موجب ε عددٌ موجبٌ δ ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_o,\delta) \cap S$ ، فإن $|f(x) - l| < \varepsilon$. وإذا كانت f دالة حقيقية لمتغير حقيقي ساحتها S (أي $S \subseteq R$) و x_o نقطة حدية لـ S ، فإننا نقول إن $\lim_{x\to x_o} f(x) = l$ ، إذا قابل كلَّ عدد موجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $0 < |x - x_o| < \delta$ ، فإن $|f(x) - l| < \varepsilon$.

٤,٢٢ — مثال

لتكن f دالة حقيقية معرفة بالدستور $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$ ساحتها $S = R - \{1\}$. من الواضح أن 1 نقطة حدية لـ S . سنبين أن $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x - 1} = 2$. ليكن ε عدداً موجباً ما . سنبين الآن أن العدد الموجب $\delta = \dfrac{\sqrt{9 + 4\varepsilon} - 3}{2}$ يحقق الشرط الوارد في التعريف . في الحقيقة ، لنفترض $0 < |x - 1| < \delta$ ، عندئذ نستنتج أن

$$\left|\frac{x^3 - x}{x - 1} - 2\right| = \left|\frac{(x-1)^2 (x+2)}{x - 1}\right|$$

ولما كان $x - 1 \neq 0$ ، فإننا نجد أن $\left|\dfrac{x^3 - x}{x - 1} - 2\right| = |(x-1)(x+2)|$. لكن

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow 1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow |x + 2| < \delta + 3$$

إذن $\left|\dfrac{x^3 - x}{x - 1} - 2\right| < \delta(\delta + 3) = \varepsilon$. لذا ، فإن $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x - 1} = 2$ حقاً .

٤,٢٣ ــ ملاحظة

إذا كانت f دالة حقيقية ساحتها S بحيث أن $]a, +\infty[\subseteq S$ ، بفرض a عدداً حقيقياً ، فإن التعريف (٤.١١) الوارد بلغة الجوارات يبقى ذا معنى عندما $x_o = +\infty$ ، حيث جوار العدد $+\infty$ معطى بالبند (٢.٥٩٤) . وعلى وجه التحديد، فإننا نقول إن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ، إذا قابل كلَّ جوار $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ للنقطة l جوارٌ $]\delta, +\infty[$ للنقطة $+\infty$ ، بحيث أنه إذا كان $x \in]\delta, +\infty[$ فإن $f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. وبعبارة أخرى ، يجب أن يقابل كلَّ عدد موجب ε عددٌ δ (يمكن اعتباره موجباً) بحيث أنه إذا كان $x > \delta$ فإن $|f(x) - l| < \varepsilon$.

ونترك للقارىء صياغة التعريف في الحالة $x_o = -\infty$.

هذا وإذا أخذنا مجموعة وصول الدالة f موسَّع الأعداد الحقيقية R^* (٢.٥٩٣) ، فمن الممكن توسيع التعريف (٤.١١) بحيث يشتمل الحالتين $l = +\infty$ ، $l = -\infty$.

٤.٢٤ ــ ملاحظة

إستخدمنا في النظرية (٤.١٤) المصطلح التالي « النهاية $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ موجودة » . ويعني هذا، في حالة كون f دالة حقيقية ، بأن هنالك عدداً « منتهياً » l ، بحيث يكون $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$. وعندما تكون النهاية « غير منتهية » فإننا نشير إلى ذلك بالرمز $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ (أو $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty$) .

٤.٢٥ ــ مثال

لنأخذ الدالة المعرفة بالدستور $\frac{x}{x+1}$ ، والتي ساحتها $S = R - \{-1\}$. سنبين الآن أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.
ليكن ε عدداً موجباً ما . سنبين أنه يقابل الكرةَ المفتوحةَ $N(1,\varepsilon)$ الكرةُ المفتوحةُ $]-\infty, -1-\frac{1}{\varepsilon}[$ التي مركزها $-\infty$ (راجع (٢.٥٩٤)) ، بحيث إذا كان x عنصراً من $]-\infty, -1-\frac{1}{\varepsilon}[\cap S =]-\infty, -1-\frac{1}{\varepsilon}[$ فإن $f(x) \in N(1,\varepsilon)$.
وبعبارة أخرى ، سنبين أنه إذا كان $x < -1-\frac{1}{\varepsilon}$ ، فإن $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$. في الحقيقة لدينا

$$x < -1-\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x+1 < -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow -(x+1) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{-1}{x+1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$$

وبذا يتم المطلوب .

٤,٢٦ — مثال

لنأخذ الدالة $\frac{1}{x^2}$ ، التي ساحتها $S = R-\{0\}$. إن 0 نقطة حدية للساحة . لإثبات أن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. يكفي أن نبين بأنه يقابل الكرةَ المفتوحةَ $]\lambda, +\infty[$ (حيث $\lambda > 0$) كرةٌ مفتوحةٌ ($N(0,\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$. بحيث أن $x \in N'(0,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \cap S$ تقتضي أن يكون $\frac{1}{x^2} \in]\lambda, +\infty[$ (علل ذلك) . إن هذا يعني أن علينا إثبات صحة الاقتضاء التالي :

$$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \lambda$$

وهذا اقتضاء واضح . إذن نجد حقاً أن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

سنورد الآن نظرية تتعلق بنهاية مجموع وحاصل ضرب وحاصل قسمة دالتين حقيقيتين . ورغم أن جمع وضرب وقسمة دالتين حقيقيتين عمليات ترد في علم الحساب التفاضلي والتكاملي ، إلا أننا نفضل تعريفها من جديد خشية عدم تعرف القارىء عليها في دراسته السابقة .

٤,٢٧ — تعريف

لتكن f,g دالتين حقيقيتين ساحتاهما T و S على الترتيب . عندئذ :

(١) إن $f+g$ دالة حقيقية ساحتها $S \cap T$ ، بحيث أنه أياً كان x من هذه الساحة ، فإن $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.

(٢) إن fg دالة حقيقية ساحتها $S \cap T$ ، بحيث أنه أياً كان x من هذه الساحة ، فإن $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(٣) إن $\frac{f}{g}$ دالة حقيقية ساحتها $S \cap T - \{x : g(x) = 0\}$ ، بحيث أنه أياً كان x من هذه الساحة ، فإن

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

٤,٢٨ — نظرية

لتكن f,g دالتين حقيقيتين ساحتاهما T و S على الترتيب ، ولتكن x_0 نقطة حدية للمجموعة $S \cap T$ [1] . فإذا افترضنا وجود النهايتين $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ ، فإن :

---

(١) من الواضح أن x_0 تكون عندئذ نقطة حدية لكل من T و S .

(١) $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

(٢) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$

(٣) إذا كان $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ ، فإن $\lim_{x \to x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

البرهان

(١) لنضع $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. عندئذ يقابل كل عدد موجب ε عددان موجبان δ_1 و δ_2 ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta_1) \cap S$ ، فإن $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ، وإذا كان $x \in N'(x_0, \delta_2) \cap T$ ، فإن $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. فإذا رمزنا بـ δ لأصغر العددين δ_1, δ_2 ، وجدنا أنه يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta) \cap S \cap T$ ، فإن $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ و $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ الأمر الذي يترتب عليه أن

$$|(f+g)(x) - (a+b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(٢) سنأخذ a, b كما في (١) . عندئذ ، نجد أنه يقابل العدد 1 عدد $\delta_0 > 0$ ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta_0) \cap S$ ، فإن $|f(x) - a| < 1$ ، $|f(x)| - |a| \leq |f(x) - a| < 1$ ، أي أن $|f(x)| < 1 + |a|$. لنعد إلى $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ مرة أخرى ، ولنأخذ العدد الموجب $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$ ، بفرض ε عدداً موجباً ما . عندئذ ، يقابل ε_1 عدد موجب δ_1 ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta_1) \cap S$ ، فإن $|f(x) - a| < \varepsilon_1$. وفيما يخص $g(x)$ نجد أنه يقابل العددَ الموجبَ $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$ عدد موجب δ_2 ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta_2) \cap T$ ، فإن $|g(x) - b| < \varepsilon_2$. لنضع $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. عندها ، نجد أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta) \cap S \cap T$ ، فإن

$$|(fg)(x) - ab| = |f(x)g(x) - f(x)b + f(x)b - ab| \leq$$
$$\leq |f(x)||g(x) - b| + |b||f(x) - a| < \varepsilon$$

(٣) لنأخذ b ثانيةً كما في (١) . عندئذ يقابل العدد الموجب $\frac{|b|}{2}$ عدد موجب δ_1 ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta_1) \cap T$ ، فإن $|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$ ، أي $|g(x)| > \frac{|b|}{2}$. ويترتب على هذا أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta_1) \cap T$ ، فإن $g(x) \neq 0$ ، وبالتالي فإذا رمزنا بـ W لساحة الدالة $\frac{1}{g}$ فإن $N'(x_0, \delta_1) \cap T \subseteq W$. ليكن ε عدداً موجباً ما . عندئذ يقابل $\frac{\varepsilon b^2}{2}$ عددٌ موجب δ_2 ، بحيث أنه إذا كان $x \in N'(x_0, \delta_2) \cap T$ ، فإن $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon b^2}{2}$. لنفترض

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ، وليكن x عنصراً من $N'(x_o,\delta) \cap W$. لما كان $N'(x_o,\delta) \cap T \subseteq W \subseteq T$ ، فمن الممكن الاستنتاج من هذا أن $N'(x_o,\delta) \cap W = N'(x_o,\delta) \cap T$. لذا ، نجد أنه إذا كان $x \in N'(x_o,\delta) \cap W$ ، فإن

$$\left|\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|bg(x)|}|g(x) - b| < \frac{2}{b^2}|g(x) - b| < \varepsilon$$

وبالتالي ، فإن $\lim_{x \to x_o} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to x_o} g(x)}$.

إن البرهان التام للشق (٣) ، يكتمل ، إذا طبقنا الشق (٢) من هذه النظرية على حاصل ضرب الدالة f بالدالة $\frac{1}{g}$. ■

٤,٢٩ — مثال

لتكن f دالة حقيقية ساحتها R محددة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} & (\text{عندما } x \neq \pm 2) \\ 1 & (\text{عندما } x = -2) \\ -3 & (\text{عندما } x = 2) \end{cases}$$

لايجاد نهاية الدالة f ، عندما يسعى x الى 2 نلاحظ أن

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+2}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 2}(x-2)}{\lim_{x \to 2}(x+2)} = \frac{0}{4} = 0$$

لاحظ هنا أن $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

بالإضافة إلى المفهوم العادي لنهاية دالة في نقطة ، والذي اقتصرنا عليه حتى الآن ، هنالك نهايات من أنماط خاصة ، نورد أولاها في ثنايا التعريف التالي .

٤,٢٩١ — تعريف

لتكن f دالة حقيقية لمتحول حقيقي ساحتها S ، ولنرمز بـ E للمجموعة $]x_o, +\infty[\cap S$. فإذا كانت x_o نقطة حدية لـ E ، وكانت f(x) تسعى إلى l عندما يسعى x إلى x_o في E أي $\lim_{\substack{x \to x_o \\ \text{في } E}} f(x) = l$ (راجع ٤,١٧) ، فإن l تسمى **النهاية اليمنى** للدالة f في x_o ، ويرمز لها بـ $f(x_o+)$ ، ونكتب عندئذ «إن $\lim_{x \to x_o+} f(x) = l$ » أو «إن f

تسعى الى l عندما يسعى x إلى x_o+ » . وبعبارة أخرى ، فإن $\lim_{x\to x_o+} f(x) = l$ ، إذا قابل كلَّ عدد موجب ε عددٌ موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $x_o < x < x_o + \delta$ ، فإن $|f(x) - l| < \varepsilon$.

لنفترض الآن أن $E =]-\infty, x_o[\cap S$ ،وأن x_o نقطة حدية لـ E . فإذا سعت f إلى l عندما يسعى x إلى x_o في E (٤,١٧) ، فإننا نسمي l **النهاية اليسرى** للدالة f في x_o ، ونرمز لها بـ $f(x_o-)$. ومن الممكن أن نكتب في هذه الحالة «أن $\lim_{x\to x_o-} f(x) = l$ » أو «أن f تسعى الى l عندما يسعى x الى x_o- » . وبعبارة أخرى ، فإن $\lim_{x\to x_o-} f(x) = l$ ، إذا قابل كلَّ عدد موجب ε عددٌ موجبٌ δ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $x_o - \delta < x < x_o$ ، فإن $|f(x) - l| < \varepsilon$

٤,٢٩٢ — مثال

لتكن f دالة ساحتها R معرفة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\text{عندما } x < 0) \\ \sin x^{-1} & (\text{عندما } x > 0) \end{cases}$$

يبين التعريف السابق ، أن $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$ ، في حين أن $\lim_{x\to 0+} f(x)$ غير موجودة .

ونترك للقارىء التحقق من صحة النظرية التالية .

٤,٢٩٣ — نظرية

لتكن f دالة حقيقية للمتحول الحقيقي و x_o نقطة حدية لساحة f . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون نهاية f موجودة في x_o هو أن تكون النهايتان اليمنى واليسرى لـ f في x_o موجودتين ، وأن تكون هاتان النهايتان متساويتين .

٤,٢٩٤ — مثال :

نعرِّف **دالة أكبر عدد صحيح** $[[\ ]]$ بأنها دالة ساحتها R ومداها Z ، بحيث أن خيال x وفق هذه الدالة (الذي نرمز له بـ $[[x]]$) هو أكبر عدد صحيح n يحقق المتراجحة $n \leq x$. فمثلاً $[[1.2]] = 1$ و $[[5]] = 5$ و $[[-5]] = -5$ و $[[-\frac{1}{3}]] = -1$.

نلاحظ أنه إذا كان n عدداً صحيحاً ما ، فإنه يترتب على (٤,١٩١) أن $\lim_{x\to n+} [[x]] = n$ ، في حين $\lim_{x\to n-} [[x]] = n - 1$ لذا ، فإن $\lim_{x\to n} [[x]]$ غير موجودة .

هنالك مفهومٌ ذو أهمية بالغة للنهاية أعمٌّ من مفهوم نهاية دالة في نقطة ، ألا وهو مفهوم النهاية العليا والنهاية الدنيا للدالة . وفيما يلي سنقدم تعريف هذين النوعين من النهايات،مع إيراد بعض أهم خواصها بعد إدراج التعريف التالي .

٤,٢٩٥ — تعريف

لتكن f دالة حقيقية محدودة لمتغير حقيقي . لتكن S ساحة f و x_o نقطة حدية لـ S . لنفترض γ عدداً حقيقياً موجباً ما ، ولتعرف الدالتين $\varphi_f(\gamma)$ و $\Phi_f(\gamma)$ كما يلي :

$$\Phi_f(\gamma) = \sup\{ f(x) : x \in S, 0 < |x - x_0| < \gamma \}$$
$$\varphi_f(\gamma) = \inf\{ f(x) : x \in S, 0 < |x - x_0| < \gamma \}$$

٤,٢٩٦ — تعريف

لتكن f دالة حقيقية محدودة ساحتها S غير خالية و x_o نقطة حدية لـ S . لنعرف العددين

$$\lim_{x \to x_0} \sup f(x) = \lim_{\gamma \to 0} \Phi_f(\gamma) = \Phi_f(0+)$$

$$\lim_{x \to x_0} \inf f(x) = \lim_{\gamma \to 0} \varphi_f(\gamma) = \varphi_f(0+)$$

يدعى هذان العددان **النهاية العليا والنهاية الدنيا** للدالة f في x_o على الترتيب . (يرمز لهاتين النهايتين أحياناً بـ $\overline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$ و $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$ على الترتيب) .

من الواضح أنه لا يلزم لتعريف هاتين النهايتين أن تكون الدالة f محدودة. بل يلزم أن تكون f محدودة في كرة مفتوحة ما ، مركزها x_o .

وفي الحالة التي تكون فيها الساحة S للدالة f غير محدودة من الأعلى ، فمن الممكن افتراض

$$\Phi_f(\gamma) = \sup\{ f(x) : x \in S , x > \gamma \}$$
$$\varphi_f(\gamma) = \inf\{ f(x) : x \in S , x > \gamma \}$$

وعندئذ نعرف النهاية العليا والنهاية الدنيا للدالة f على التوالي في ∞ كما يلي :

$$\lim_{x \to \infty} \sup f(x) = \lim_{\gamma \to \infty} \Phi_f(\gamma)$$

$$\lim_{x \to \infty} \inf f(x) = \lim_{\gamma \to \infty} \varphi_f(\gamma)$$

ومن الممكن في هذا الصدد اعتبار ∞ نقطة حدية لـ S ، ذلك أن كل جوار لـ ∞ يحوي نقطة من S . وفي الحالة التي تكون فيها f متوالية محدودة ، فإن العددين الأخيرين يسميان **النهاية العليا والنهاية الدنيا** للمتوالية ، لأنه لا يوجد لساحة المتوالية نقطة حدية منتهية . ونترك للقارىء صياغة تعريفي النهايتين العليا والدنيا للدالة f في $-\infty$.

٤,٢٩٧ ـــ مثال

لنأخذ الدالة $f(x) = \sin x^{-1}$ ، التي ساحتها $R-\{0\}$. من السهل التحقق بأنه أياً كان العدد الموجب γ ، فإن $\varphi_f(\gamma) = -1$ و $\Phi_f(\gamma) = 1$ ، وبالتالي فإن

$$\lim_{x\to 0} \sup \sin x^{-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \inf \sin x^{-1} = -1$$

لاحظ أنه لا يوجد لهذه الدالة نهاية في النقطة $x=0$.

٤,٢٩٨ ـــ نظرية

لتكن f دالة حقيقية ساحتها S غير خالية و x_o نقطة حدية لـ S . إن الشرط اللازم والكافي كي يكون لـ f النهاية l في x_o هو أن يكون

$$\lim_{x\to x_o} \inf f(x) = l = \lim_{x\to x_o} \sup f(x)$$

البرهان

لنفترض أن $f(x) \to l$ عندما $x \to x_o$. إن هذا يعني أنه يقابل العددَ الموجبَ ε عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان $x \in S$ و $0 < |x - x_o| < \delta$ ، فإن $|f(x) - l| < \varepsilon$. نستنتج من هذا ، أنه إذا كان $0 < \gamma < \delta$ ، فإن $|\Phi_f(\gamma) - l| < \varepsilon$ ، $|\varphi_f(\gamma) - l| < \varepsilon$. واستناداً إلى التعريف نجد $\Phi_f(0+) = l = \varphi_f(0+)$.

وبالعكس ، لنفترض أن شرط النظرية محقق . إذن يقابل العددَ الموجبَ ε عدد موجب δ ، بحيث يكون $|\varphi_f(\delta) - l| < \varepsilon$ و $|\Phi_f(\delta) - l| < \varepsilon$. لكن إذا كان x عنصراً من S يحقق الشرط $0 < |x - x_o| < \delta$ ، فإن $\varphi_f(\delta) < f(x) < \Phi_f(\delta)$. إذن

$$-\varepsilon < \varphi_f(\delta) - l < f(x) - l < \Phi_f(\delta) - l < \varepsilon$$

نستنتج من هذا ، أنه إذا كان $x \in S$ و $0 < |x - x_o| < \delta$ ، فإن $|f(x) - l| < \varepsilon$. وهذا يعني أن $f(x) \to l$ عندما $x \to x_o$. ■

٤,٢٩٩ — نظرية

لتكن f,g دالتين حقيقيتين محدودتين ساحتاهما S,T على الترتيب ولتكن x_o نقطة حدية لـ $S\cap T$.
عندئذ :

(١)
$$\lim_{x\to x_o}\sup(f+g)(x)\leq\lim_{x\to x_o}\sup f(x)+\lim_{x\to x_o}\sup g(x)$$
$$\lim_{x\to x_o}\inf(f+g)(x)\geq\lim_{x\to x_o}\inf f(x)+\lim_{x\to x_o}\inf g(x)$$

(٢) إذا كانت f,g دالتين غير سالبتين في جوار ما لـ x_o من عناصر $S\cap T$ ، فإن

$$\lim_{x\to x_o}\sup(fg)(x)\leq\lim_{x\to x_o}\sup f(x)\lim_{x\to x_o}\sup g(x)$$
$$\lim_{x\to x_o}\inf(fg)(x)\geq\lim_{x\to x_o}\inf f(x)\lim_{x\to x_o}\inf g(x)$$

(٣) إذا كان $g(x)\neq 0$ ، ولم يغير إشارته من أجل جميع عناصر T ، وكان $\frac{1}{g}$ محدوداً على T ، فإن

$$\lim_{x\to x_o}\sup(\frac{1}{g})(x)=\frac{1}{\lim_{x\to x_o}\sup g(x)}$$
$$\lim_{x\to x_o}\inf(\frac{1}{g})(x)=\frac{1}{\lim_{x\to x_o}\inf g(x)}$$

البرهان

سنقدم البرهان على الشقين الأولين (١) و (٢) فقط .

(١) نرى أنه يقابل العدد الموجب ε ، والعدد الموجب γ عنصر a من ساحة $f+g$ ، بحيث $0<|a-x_o|<\gamma$ ، وبحيث

$$\Phi_{f+g}(\gamma)<(f+g)(a)+\varepsilon\leq\Phi_f(\gamma)+\Phi_g(\gamma)+\varepsilon$$

فإذا سعى γ نحو الصفر مع وضعنا في الاعتبار أن ε اختياري ، حصلنا على المتراجحة الأولى في (١) . ويتم إثبات المتراجحة الثانية في (١) بصورة مماثلة .

(٢) نرى أنه يقابل العدد الموجب ε ، والعدد الموجب γ عنصرٌ a من ساحة fg ، بحيث $0<|a-x_o|<\gamma$ ، وبحيث

$$\Phi_{fg}(\gamma)<(fg)(a)+\varepsilon\leq\Phi_f(\gamma)\Phi_g(\gamma)+\varepsilon$$

إن صحة المتراجحة أو المساواة اليمنى تنتج من أن $0\leq f(a)\leq\Phi_f(\gamma)$ و $0\leq g(a)\leq\Phi_g(\gamma)$ ، فإذا سعى γ نحو الصفر ، مع وضعنا في الاعتبار أن ε اختياري ، حصلنا على المتراجحة الأولى من (٢) . ويتم إثبات المتراجحة الثانية من (٢) بصورة مماثلة . ■

٤,٢٩٩١ — مثال

لنأخذ الدالتين $g(x) = \cos\frac{1}{x}$ و $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. إن ساحة كل من هاتين الدالتين هي $R-\{0\}$ و 0 نقطة حدية لهذه الساحة المشتركة . يمكن التحقق بسهولة من أن

$$\lim_{x\to 0} \sup f(x) = \lim_{x\to 0} \sup g(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \inf f(x) = \lim_{x\to 0} \inf g(x) = -1$$

نلاحظ أن

$$f(x) + g(x) = \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \sup(f+g)(x) = \sqrt{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \inf(f+g)(x) = -\sqrt{2}$$

وبما أن $2 = 1+1 > \sqrt{2}$ ، و $-2 = (-1)+(-1) > -\sqrt{2}$ ، فإن النتيجة تنسجم مع الشق (١) من النظرية السابقة .

لدينا

$$(fg)(x) = \sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}$$

إذن $\lim_{x\to 0} \inf(fg)(x) = -\frac{1}{2}$. وبالتالي ، فلدينا في هذه الحالة

$$\lim_{x\to 0} \inf(fg)(x) < \lim_{x\to 0} \inf f(x) + \lim_{x\to 0} \inf g(x)$$

إن سبب عدم انسجام هذه النتيجة مع المتراجحة الثانية من الشق (٢) من النظرية السابقة،هو أن كلاً من f,g يغير إشارته عدداً غير منته من المرات في أي جوار للنقطة 0 ، وهذا مخالف للشرط الوارد في (٢) ، من أن f,g يجب أن تكونا غير سالبتين في جوار ما للنقطة 0 من عناصر $R-\{0\}$.

٤,٣ — نهايات المتواليات الحقيقية

Limits of Real Sequences

درسنا في البند (٣,٥) من الفصل الثالث نهاية المتوالية في فضاء متري . و لما كان فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$ فضاء مترياً ، فإن كل الحقائق المتعلقة بالمتواليات في الفضاء المتري العام ، والتي أوردناها في (٣,٥)،تنطبق على المتواليات في $\mathbb{R}$ ، أي على المتواليات الحقيقية .

وعلى هذا نستنتج أن التعريف (٣,٥١) والنظريات (٣,٥٣) و(٣,٥٤) و(٣,٥٥) صحيحة في حالة المتواليات الحقيقية ، شريطة استبدال المترك العام D بمترك القيمة المطلقة .

ولما كان للفضاء $\mathbb{R}$ خواصّ فريدة لا تتوفر في كل فضاء متري ، فمن الطبيعي أن نجد للمتواليات الحقيقية خصائص مميزة ، سنعرض لأهمها في هذا البند .

سنورد قبل كل شيء تعريف نهاية المتوالية الحقيقية ، الذي يستخلص من التعريف العام (٣,٥١) عندما يكون (X,D) هو الفضاء $\mathbb{R}$.

٤,٣١ — تعريف

لتكن $\{a_n\}, n\in N$ متوالية حقيقية ،و a عددا حقيقيا ما . نقول عن هذه المتوالية إنها **متقاربة من** a ، إذا قابل كلَّ عدد موجب ε عددٌ صحيح موجب $N\varepsilon$ ، بحيث أنه إذا كان $n \geqslant N\varepsilon$ ، فإن $|a_n - a| < \varepsilon$. تسمى a **نهاية** المتوالية $\{a_n\}, n\in N$، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ أو $a_n \to a$. ومن الممكن إيراد هذا التعريف على النحو التالي : تتقارب المتوالية $\{a_n\}, n\in N$ من a ، إذا حوى كلُّ مجال مفتوح مركزه a جميعَ عناصر المتوالية ، باستثناء عدد منته من هذه العناصر ، (قد يكون هذا العدد 0) .

٤,٣٢ — تعريف

لتكن$\{a_n\}, n\in N$ متوالية حقيقية . نقول إن هذه المتوالية **تتباعد الى** $+\infty$ ، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (أو $a_n \to +\infty$ عندما$n\to\infty$) ، إذا قابل كلَّ عدد موجب λ عددٌ صحيح موجب N_λ ، بحيث يكون $a_n > \lambda$ أياً كان العدد الصحيح الموجب n ، الذي يحقق المتراجحة $n \geqslant N_\lambda$. ونقول عن هذه المتوالية إنها **تتباعد إلى** $-\infty$، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (أو $a_n \to -\infty$ عندما $n\to\infty$) ، إذا قابل كلّ عدد موجب λ عدد صحيح موجب N_λ بحيث يكون $a_n < -\lambda$ ، أيا كان العدد الصحيح الموجب n الذي يحقق المتراجحة $n \geqslant N_\lambda$. وإذا لم تكن المتوالية متقاربة ، ولم تكن متباعدة إلى $+\infty$ أو $-\infty$، فإننا نقول إن المتوالية **متباعدة** .

٤٫٣٣ — مثال

لنأخذ المتوالية $\{a^n\}, n\in N$.

(أ) إذا كان $a=1$ ، فإن $a^n \to 1$ عندما $n\to\infty$ ، ذلك أن أي مجال مفتوح مركزه 1 ، يحوي جميع عناصر هذه المتوالية.

(ب) إذا كان $a > 1$ ، فإن $a^n \to +\infty$ عندما $n\to\infty$. لإثبات هذا ، نفترض λ عدداً موجباً ما . لما كان في هذه الحالة

$$a^n = [\,1+(a-1)\,]^n \geq 1+n(a-1)$$

فإننا نرى أن $a^n > \lambda$ ، أيا كان العدد الصحيح n الذي يحقق المتراجحة $n\geq N_\lambda$ ، حيث N_λ عدد صحيح موجب يحقق الشرط $N_\lambda > \frac{\lambda-1}{a-1}$.

(جـ) وإذا كان $a=-1$ ، فإن المتوالية متباعدة . وفي الحقيقة ، لا يمكن أن تكون هذه المتوالية متباعدة إلى $+\infty$ أو $-\infty$ ، لأنه أيا كان n فإن $a^n = \pm 1$. بقي علينا التحقق من أن متواليتنا غير متقاربة من أي عدد حقيقي x . فإذا أخذنا المجال المفتوح $]x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}[$ ، الذي مركزه x ، فلا يمكن أن يحوي العددين -1 و $+1$ معا . وبالتالي ، فإن عدداً غير منته من عناصر المتوالية واقع خارج هذا المجال ، وهذا يعني أن x لا يمكن أن يكون نهايةً للمتوالية .

(د) لنفترض الآن أن $|a|<1$. فإذا كان $a=0$ ، فمن السهل التحقق بأن $a^n \to 0$ عندما $n\to\infty$. سنثبت الآن أن هذه النتيجة صحيحة أيضاً عندما $0<|a|<1$ (وعندها تكون النتيجة صحيحة أيا كان العدد a المحصور بين -1 و $+1$) . ليكن $\varepsilon>0$ ، ولنضع $y = \frac{1}{|a|}$. عندئذ يكون

$$|a^n - 0| = |a|^n = \frac{1}{y^n} = \frac{1}{[\,1+(y-1)\,]^n} < \frac{1}{1+n\,(y-1)}$$

نستنتج من هذا أن $|a^n - 0| < \varepsilon$ أيا كان العدد الصحيح الموجب n ، الذي يحقق المتراجحة $n\geq N_\varepsilon$ ، حيث N_ε عدد صحيح موجب يحقق الشرط $N_\varepsilon > \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{y-1}$.

إذن في هذه الحالة $a_n \to 0$ عندما $n\to\infty$.

(هـ) وأخيراً ليكن $a<-1$. نترك للقارىء التحقق عندئذ من أن متواليتنا متباعدة .

وجدنا في (٣٫٥٣) أنه إذا كانت متواليةٌ متقاربةٌ ، فإن نهايتها وحيدة . وتعطي النظرية التالية خاصة إضافية لنهاية المتوالية المتقاربة ، عندما تكون هذه المتوالية حقيقية .

٤,٣٤ — نظرية

إذا كانت المتوالية الحقيقية $\{a_n\}, n\in N$ متقاربة ، فإنها محدودة .

البرهان

لنفترض أن $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، وأن $\varepsilon = 1$. عندئذ ، نجد استناداً إلى (٣,٥١) عددا صحيحاً موجباً N_1 ، بحيث أن $|a_n - a| < 1$ أياكان العدد الصحيح الموجب n ، الذي يحقق الشرط $n \geqslant N_1$. ولما كان $|a_n| - |a| \leqslant |a_n - a|$ ، فإن $n \geqslant N_1$ تقتضي أن يكون $|a_n| < |a| + 1$ ، وهذا يعني أن جميع حدود متواليتنا ، ربما بإستثناء $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1-1}$ ، تنتمي إلى المجال المفتوح $]-|a|-1, |a|+1[$. يترتب على هذا ، أنه إذا كان $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N_1-1}|, |a|+1\}$ ، فإن $|a_n| \leqslant M$ أياكان العدد الصحيح الموجب n ، وهذا يعني أن المتوالية الحقيقية المتقاربة $\{a_n\}, n\in N$ محدودة . ∎

إن عكس هذه النظرية ليس صحيحاً **بعامة** . وعلى سبيل المثال ، فقد رأينا في المثال (٤,٣٣) أن المتوالية $\{(-1)^n\}, n\in N$ متباعدة رغم كونها محدودة . بيد أن ثمة نمطاً خاصا من المتواليات الحقيقية تكون متقاربة ، إذا كانت محدودة ، نورد تعريفها فيما يلي :

٤,٣٥ — تعريف

لتكن $\{a_n\}, n\in N$ متوالية حقيقية . نقول عن هذه المتوالية إنها **متزايدة** ، إذا كان $a_n \leqslant a_{n+1}$ أياكان n من N ، **ومتناقصة** إذا كان $a_n \geqslant a_{n+1}$ أياكان n من N . أما إذا استعضنا عن $\leqslant$ و $\geqslant$ في التعريفين السابقين بـ $<$ و $>$ على الترتيب ، فإننا نقول عن المتوالية إنها **متزايدة تماما** في الحالة الأولى، **ومتناقصة تماما** في الحالة الثانية . تسمّى المتواليات المتزايدة أو المتناقصة متواليات **مطردة** . أما المتواليات المتزايدة تماما أو المتناقصة تماما فتسمّى متواليات **مطردة تماما** .

٤,٣٦ — نظرية

كل متوالية حقيقية مطردة ومحدودة لا بد وأن تكون متقاربة R .

البرهان

سنكتفي بإثبات النظرية في حال المتوالية $\{a_n\}, n\in N$ المتزايدة والمحدودة . لما كانت المجموعة $A = \{a_n : n\in N\}$ الجزئية من R غير خالية ومحدودة من الأعلى ، فإننا نحكم استناداً إلى مسلمة التمام (٢,٥١) ، أن ثمة حداً أعلى للمجموعة A وليكن a ، أي أن $\sup A = a$. ليكن ε عدداً موجبا ما . عندئذ ، هنالك عدد a_k من A ، بحيث أن

$a-\varepsilon < a_k \leqslant a$ ، ذلك أنه لو لم يصح ذلك ، لغدا $a-\varepsilon$ عنصراً حاداً من الأعلى للمجموعة A . ولترتب على هذا أن الحد الأعلى a للمجموعة A أكبر من العنصر $a-\varepsilon$ الحاد من الأعلى لـ A . وهذا غير ممكن . وبما أن متواليتنا متزايدة . فإن $a_k \leqslant a_n \leqslant a$ ، أياكان العدد n الذي يكبر k . إذن $|a_n - a| < \varepsilon$ أياكان العدد الصحيح الموجب n الذي يحقق الشرط $n > k$ ، أي أن $a_n \to a$. ■

٤,٣٧ — مثال

لنأخذ المتوالية $\{a_n\}, n \in N$ ، حيث $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

من الواضح ، أن هذه المتوالية متزايدة تماما (إذن مطردة) . كما أنها محدودة من الأعلى بالعدد 3 . لأنه اياكان n من N ، فإن

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

$$\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 3$$

وبالتالي ، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجودة . يرمز عادة لهذه النهاية بالعدد e،ونعبر عن هذا بأن نكتب

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

لنأخذ المتوالية $1,0,2,1,0,2,1,0,2,\ldots$. من الواضح أن هذه متوالية متباعدة . فإذا أخذنا المتوالية الجزئية $1,0,1,0,1,0,\ldots$ من هذه المتوالية ، فإنها متوالية جزئية متباعدة كذلك . بيد أننا لو أخذنا المتوالية الجزئية $1,1,1,\ldots$ من متواليتنا ، فإن هذه المتوالية الجزئية متقاربة . ويبين هذا المثال ، بأن المتوالية الجزئية من متوالية متباعدة قد تكون متباعدة أو متقاربة . بيد أن أي متوالية جزئية من متوالية متقاربة لا بد وأن تكون متقاربة ، الأمر الذي تقرره النظرية التالية .

٤,٣٨ — نظرية

إذاكانت المتوالية $\{a_n\}, n \in N$ متقاربة من a ، وكانت $\{a_{k_n}\}, n \in N$ متوالية جزئية ما من $\{a_n\}, n \in N$ ، فإن هذه المتوالية الجزئية لا بد وان تكون متقاربة من a .

البرهان

لما كانت $\{a_n\}, n \in N$ متقاربة من a ، فإنه يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث يكون $|a_n - a| < \varepsilon$ ، إذا حقق n الشرط $n \geqslant N_\varepsilon$. لكن إذا كان $n \geqslant N_\varepsilon$ ، فإن $k_n \geqslant N_\varepsilon$ (لماذا؟) الأمر الذي

يترتب عليه وقتئذ أن $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. وهكذا نكون قد وجدنا أنه يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث يكون $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ أيا كان العدد الصحيح الموجب n ، الذي يحقق الشرط $n \geq N_\varepsilon$. إذن فالمتوالية الجزئية $\{a_{k_n}\}, n \in N$ متقاربة،كما أن $a_{k_n} \to a$. ■

من الواضح أن عكس هذه النظرية غير صحيح . فقد رأينا في المثال الوارد قبل النظرية أن $1,1,1,\ldots$ متوالية جزئية متقاربة من متوالية متباعدة . لذا ، فان تقارب متوالية جزئية من متوالية لا يضمن تقارب هذه المتوالية . بيد أن تقارب متوالية جزئية من متوالية مطردة يضمن تقارب هذه المتوالية ، وهذا ما تؤكده النظرية التالية ، التي سنكتفي بسرد نصها دون البرهان .

٤,٣٩ — نظرية

إذا وجدت متوالية جزئية $\{a_{k_n}\}, n \in N$ متقاربة من متوالية مطردة $\{a_n\}, n \in N$، فإن المتوالية $\{a_n\}, n \in N$ لا بد وأن تكون متقاربة . وفضلا عن ذلك ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$ في حالة المتوالية المطردة المتزايدة و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, \ldots\}$ في حالة المتوالية المطردة المتناقصة .

وهكذا ، فإن النظرية السابقة (٤,٣٩) والنظرية (٤,٣٦) توفران شرطين كافيين لتقارب متوالية مطردة .

سنورد الآن نظرية جبر النهايات للمتواليات الحقيقية ، تلك النظرية الهامة في حد ذاتها ، والتي غالباً ما تستخدم في كثير من التطبيقات العملية .

٤,٣٩١ — نظرية (جبر نهايات المتواليات)

لتكن $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ متواليتين متقاربتين من a ، b على الترتيب . عندئذ :

(١) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(٢) $\lim\limits_{n\to\infty} (ka_n) = ka$، أيا كان العدد الحقيقي k .

(٣) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

(٤) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$، شريطة أن يكون $b \neq 0$ و $b_n \neq 0$ أيا كان n من N .

البرهان

إن هذه النظرية تنتج عن النظرية (٤,٢٨)، لأن المتواليتين دالتان حقيقيتان ساحتها المشتركة هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N، كما أن ∞ هي نقطة حدية لـ N . ورغم هذا، فإننا نهيب بالقارىء إثبات هذه النظرية مباشرة استنادا الى التعريف (٤,٣١) . ■

سنورد الآن مثالا نبين فيه كيف يمكن استغلال النظرية السابقة في بعض التطبيقات العملية .

٤,٣٩٢ — مثال

لإيجاد نهاية المتوالية $n \in N$ ، $\{ \frac{5n^2 - 3n + 7}{10n^2 - n} \}$ ، نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 3n + 7}{10n^2 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}{10 - \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(10 - \frac{1}{n})}$$ (استناداً إلى (٤) من (٥,٣٩١))

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty}(\frac{3}{n}) + \lim_{n\to\infty}(\frac{7}{n^2})}{\lim_{n\to\infty} 10 - \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})}$$ (استناداً إلى (١))

$$= \frac{5 - 3\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) + 7\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})}{10 - \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})}$$ (استناداً إلى (٢) و (٣))

$$= \frac{5 - 3(0) + 7(0)(0)}{10 - 0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

٤,٣٩٣ — نظرية

لتكن $\{a_n\},\{b_n\}$ متواليتين حقيقيتين متقاربتين من a,b على الترتيب . فإذا كان $a_n > b_n$ بدءاً من عدد طبيعي ما M ، فإن $a \geq b$.

البرهان

لنفترض جدلاً أن متواليتينا تحققان شرط النظرية ، وأن $a < b$. بما أن هاتين المتواليتين متقاربتان من b و a ، فإنه يقابل العدد الموجب $b-a$ عددان صحيحان موجبان N_1 و N_2 بحيث أنه إذا كان $n \geq N_1$ ، فإن $|a_n - a| < \frac{b-a}{2}$. وإذا كان $n \geq N_2$ ، فإن $|b_n - b| < \frac{b-a}{2}$. يترتب على هذا أنه إذا كان $n \geq N_1$ فإن $a_n < \frac{b+a}{2}$ ، وأنه إذا كان $n \geq N_2$ ، فإن $b_n > \frac{b+a}{2}$. نستنتج من هذا أنه إذا كان $n \geq \text{Max}\{M, N_1, N_2\}$. فإن $a_n > b_n > \frac{b+a}{2} > a_n$ ، وهذا مستحيل . إذن ، لا بد أن يكون $a \geq b$. ■

٤,٣٩٤ — نتيجة

لتكن $\{b_n\}, n \in N$ متوالية حقيقية متقاربة من b . فإذا كان a عددا حقيقياً ما بحيث $a > b_n$ ، بدءا من عدد طبيعي ما M ، فإن $a \geq b$.

البرهان

إذا افترضنا في النظرية (٤,٣٩٣) $a_n = a$ ، أيا كان العدد الصحيح الموجب n ، وقعنا على النتيجة مباشرة . ■

تمـارين

نهايات الدوال الحقيقية

(٤ — ١)

لتكن f_1 و f_2 دالتين حقيقيتين ساحتهما المشتركة المجموعة الجزئية S من فضاء متري ، ولتكن x_o نقطة حدية لـ S . فإذا افترضنا أن نهايتي f_1 و f_2 في النقطة x_o موجودتان ، فأثبت أن للدالة الحقيقية f ، التي ساحتها S والمحددة بالدستور $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ ، نهاية في x_o .

(**إرشاد** $f(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x) + |f_1(x) - f_2(x)|]$)

(٤ — ٢)

احسب النهايتين التاليتين (في حال وجودهما) :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

وذلك بافتراض S أيا من المجموعات التالية في الفضاء الإقليدي ذي البعدين $\mathbb{R}^2$:

(i) $S = \{(x,y) : y = ax\}$ $(a \neq 0)$

(ii) $S = \{(x,y) : y = ax^2\}$ $(a \neq 0)$

(iii) $S = \{(x,y) : y^2 = ax\}$ $(a \neq 0)$

(iv) $S = \mathbb{R}^2$

(٤ — ٣)

لتكن f دالة حقيقية ساحتها المجال المفتوح $]a,b[$. وليكن x عنصراً من $]a,b[$. لنأخذ الدعويين التاليتين :

(i) $\lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)| = 0$

(ii) $\lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0$

(أ) أثبت أن (i) تقتضي (ii) دوما .

(ب) أورد مثالا تبين فيه أنه من الممكن أن تتحقق (ii) دون أن تتحقق (i) .

(٤ — ٤)

لتكن الدوال الحقيقية الخمس f ، التي ساحة كل منها $\mathbb{R}^2$ ، والمحددة بالدساتير التالية :

(i)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{(عندما } (x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & \text{(عندما } (x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

(ii)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} & \text{(عندما } (x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & \text{(عندما } (x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

(iii)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin(xy) & \text{(عندما } x \neq 0) \\ y & \text{(عندما } x = 0) \end{cases}$$

(iv)
$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} & \text{(عندما } (x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & \text{(عندما } x = 0 \text{ أو } y = 0) \end{cases}$$

(v)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y} & \text{(عندما } \tan x \neq \tan y) \\ \cos^3 x & \text{(عندما } \tan x = \tan y) \end{cases}$$

قرر في كل من هذه الدوال الخمس ما إذا كانت النهايات الثلاث التالية موجودة ، ثم احسب هذه النهايات في حال وجودها :

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] \ , \qquad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)] \ , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

(٤ — ٥)

لتكن f دالة حقيقية ساحتها $\mathbb{R}$ ، ومحددة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{(عندما يكون x عاديا)} \\ 1 & \text{(عندما يكون x غير عادي)} \end{cases}$$

بين أن $\lim_{x \to y} f(x)$ غير موجودة أياً كان y من R .

(٤ — ٦)

لتكن $f_1, f_2, \ldots, f_n$ دوال حقيقية ساحة كل منها مجموعة جزئية S من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $f : S \to \mathbb{R}^n$ دالة محددة بالدستور

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x))$$

أياً كان x من S . فإذا كانت a نقطة حدية للمجموعة S ، وكانت b نقطة من R^n فبرهن أن المساواة

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad , \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

تكافىء المساويات التالية (التي عددها n) :

$$\lim_{x \to a} f_k(x) = b_k$$

(**إرشاد** . لدينا :

$$|f_k(x) - b_k| \leq \|f(x) - b\| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - b_k| \quad)$$

(٤ — ٧)

لتكن f,g دالتين حقيقيتين ساحتها المشتركة المجموعة الجزئية S من الفضاء المتري (X,D)، ولتكن x_o نقطة حدية لـ S . بين أنه إذا كانت $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$. وكانت الدالة g محدودة (أي إذا كان هنالك عدد موجب M ، بحيث $|g(x)| \leq M$. أياً كان x من S) . فإن $\lim_{x \to x_o} (fg)(x) = 0$

(٤ — ٨)

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{(عندما يكون x غير عادي)} \\ 1 - x & \text{(عندما يكون x عاديا)} \end{cases}$$

أوجد $\lim_{x \to x_o} f(x)$. (ادرس اولا الحالة $x_o = \frac{1}{2}$ ، ثم الحالة عندما يكون x_o عدداً عاديا مغايراً لـ $\frac{1}{2}$، وأخيراً الحالة التي يكون فيها x_o غير عادي) .

(٤ — ٩)

لتكن f دالة حقيقية ساحتها المجموعة الجزئية S من الفضاء المتري (X,D) , و لتكن a نقطة حدية لـ S و b عددا حقيقياً موجباً بحيث $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

(أ) بين أن ثمة كرة مفتوحة $N(a,\delta_1)$ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من $N'(a,\delta_1) \cap S$ ، فإن $f(x) > 0$.

(ب) أثبت وجود كرة مفتوحة $N(a,\delta_2)$ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من $N'(a,\delta_2) \cap S$ ، فإن $f(x) > \frac{b}{2}$.

(٤ — ١٠)

لتكن f دالة حقيقية على $\mathbb{R}$ محددة بالدستور التالي :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & (\text{عندما } x < 2) \\ 2 & (\text{عندما } x = 2) \\ x+2 & (\text{عندما } 2 < x) \end{cases}$$

أوجد $\lim_{x \to 2_-} f(x)$ و $\lim_{x \to 2_+} f(x)$. هل النهاية $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة . ولماذا ؟

(٤ — ١١)

لتكن f دالة حقيقية ساحتها $]0, +\infty[$. ومحددة بالدستور $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. برهن أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(٤ — ١٢)

لتكن f دالة حقيقية ساحتها R . وليكن b عددا حقيقيا . برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ هو أن يقابل العدد الموجبَ الاختياري ε عدد صحيح موجب N_ε . بحيث أنه إذا كان x عددا حقيقياً يحقق المتراجحة $x \geqslant N_\varepsilon$. فإن $|f(x) - b| < \varepsilon$.

(٤ — ١٣)

لتكن f دالة حقيقية على R . وليكن a عددا حقيقيا ما . لنأخذ الدعويين التاليتين :

$$(i)\ \lim_{x \to a} f(x) = b\ ,\ (ii)\ \lim_{x \to a} |f(x)| = |b|$$

(أ) أثبت أن (i) تقتضي (ii) دوما .

(ب) أورد مثالا يبين أن صحة (ii) لا تقتضي بالضرورة صحة (i) .

(٤ — ١٤)

لتكن f دالة حقيقية على R . برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ هو أن يقابل العددَ الموجبَ الاختياري α عدد صحيح موجب N_α ، بحيث يكون $f(x) > \alpha$ أياكان العدد الحقيقي x الذي يحقق المتراجحة $x \geq N_\alpha$.

(٤ — ١٥)

لتكن f دالة حقيقية على R وليكن a عدداً حقيقيا ما ، ولنفترض أن تقارب اي متوالية حقيقية $\{a_n\}, n\in N$ من العدد a ، يقتضي تقارب المتوالية الحقيقية $\{f(a_n)\}, n\in N$. برهن عندئذ أن النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة .

(**إرشاد:** لتكن $\{a_n\}, \{a'_n\}$ متواليتين متقاربتين من a . عندئذ ، نجد ان $f(a_n) \to b$ ، و $f(a'_n) \to c$. برهن أن $b = c$) .

النهاية العليا والنهاية الدنيا لدالة

(٤ — ١٦)

لتكن f دالة حقيقية محدودة لمتغير حقيقي ساحتها S ، ولتكن x_o نقطة حدية لـ S . بين أن

$$\limsup_{x\to x_o} -f(x) = -\liminf_{x\to x_o} f(x)$$

(٤ — ١٧)

إذاكانت f دالة حقيقية لمتغير حقيقي ساحتها S ، وكانت x_o نقطة حدية لـ S . بين أنه إذاكان α عددا غير سالب ، فإن

$$\limsup_{x\to x_o} f^\alpha(x) = \left(\limsup_{x\to x_o} f(x)\right)^\alpha$$

$$\liminf_{x\to x_o} f^\alpha(x) = \left(\liminf_{x\to x_o} f(x)\right)^\alpha$$

(٤ — ١٨)

إذ تَبَنَّيْنَا فرضيات النظرية (٤،٢٩٩) ، فبرهن على صحة ما يلي :

$$\lim_{x\to x_0} \inf f(x) + \lim_{x\to x_0} \sup g(x) \leq \lim_{x\to x_0} \sup (f+g)(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \inf (f+g)(x) \leq \lim_{x\to x_0} \sup f(x) + \lim_{x\to x_0} \inf g(x)$$

استنتج من هذا . ومن الشق (١) من النظرية (٤،٢٩٩) ، أنه في حال كون النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجودة ، فإن

$$\lim_{x\to x_0} \sup (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} \sup g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \inf (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} \inf g(x)$$

(٤ — ١٩)

لتكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ دالة معرفة كما يلي $f(x) = \frac{1}{q}$. إذا كان x عددا عادياً من الشكل $\frac{p}{q}$ (حيث $\frac{p}{q}$ كسر غير قابل للاختزال) و $f(0) = 1$. أما إذا كان x عددا غير عادي ، فإن $f(x) = 0$. احسب $\lim_{x\to x_0} \sup f(x)$ ، و $\lim_{x\to x_0} \inf f(x)$ لكل العناصر x_o في $[0,1]$.

(٤ — ٢٠)

نقول عن دالة حقيقية لمتغير حقيقي ساحتها S إنها **نصف مستمرة من الأعلى** في النقطة x_o إذا كان $x_o \in S$ ، وإذا قابل العدد الموجبَ الاختياريَّ ε عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من S يحقق المتراجحة $|x - x_o| < \delta$ ، فإن $f(x) < f(x_o) + \varepsilon$. فإذا افترضنا أن $x_o \in S$ ، وأن x_o نقطة حدية لـ S ، فبين أن الشرط اللازم والكافي كي تكون f نصف مستمرة من الأعلى في x_o هو أن يكون

$$. \lim_{x\to x_0} \sup f(x) \leq f(x_o)$$

تقدم بتعريف مماثل **لنصف الاستمرار من الأدنى** ، ثم أورد نتيجة مماثلة وَأْتِ ببرهان لها .

(٤ — ٢١)

برهن على أن مجموع وحاصل ضرب دالتين كل منهما نصف مستمرة من الأعلى (الأدنى) دالتان كل منهما نصف مستمرة من الأعلى (الأدنى) .

نهايات المتواليات الحقيقية

(٤ — ٢٢)

(أ) استنتج استنادا إلى نظرية ذات الحدين ، أنه عندما $b > 0$ ، فإن

$$(1+b)^n \geqslant 1+nb \qquad\qquad (1+b)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\, b^2$$

(ب) إذا كتبنا $a^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n$ عندما $a > 1$ ، فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ، واستنتج من هذا أن $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

وعندما $0 < a < 1$ فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

(جـ) إذا كتبنا أن $n^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n$ ، فبرهن أن $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ، واستنتج من هذا أن $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

(د) برهن أن $\lim\limits_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a,b\}$ ، وذلك بفرض a,b عددين موجبين .

(٤ — ٢٣)

برهن أن كل متوالية متناقصة ومحدودة في $\mathbb{R}$ لا بد وأن تكون متقاربة (**إرشاد** . راجع برهان النظرية (٤،٣٦)).

(٤،٢٤)

قدم مثالا تبين فيه **أنْ** ليس كل متوالية مطردة ومحدودة في Q هي بالضرورة متقاربة في Q

(٤ — ٢٥)

لتكن $\{a_n\}, n\in N$ متوالية حقيقية متقاربة من a . بين أن ثمة متوالية جزئية مطردة $\{a_{k_n}\}, n\in N$ من $\{a_n\}, n\in N$ متقاربة من a كذلك . (**إرشاد** . هنالك مجموعة جزئية غير منتهية S من الأعداد الطبيعية N ، بحيث $\{a_n : n\in S\} \subseteq\,]a-1,a]$ أو $\{a_n : n\in S\} \subseteq [a,a+1[$

إختر المتوالية الجزئية المطردة من المجال المناسب ، ومن ثم استخدم النظرية (٤،٣٨)) .

(٤ — ٢٦)

تحقق،باستخدام نظرية ذات الحدين ، بأن المتوالية $\{a_n\}, n\in N$ ، حيث $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ، متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ، ومن ثم فإنها متقاربة .

(٤ — ٢٧)

(أ) تحقق من أنه اذا كان $a > 1$ ، فإن $1 + a + \ldots + a^{n-1} < na^n$ أيا كان n من N ، ثم برهن أنه أيا كان n من N ، فإن

$$\frac{a^n - 1}{n} < \frac{a^{n+1} - 1}{n+1}$$

برهن كذلك ، أنه إذا كان $0 < a < 1$ ، فإننا نجد أيا كان n من N أن

$$\frac{1 - a^{n+1}}{n+1} < \frac{1 - a^n}{n}$$

(ب) ليكن γ, s عنصرين ما من Q ، حيث $0 < \gamma < s$. استنتج أن

(أ) $\frac{a^\gamma - 1}{\gamma} < \frac{a^s - 1}{s}$ عندما $a > 1$

(ب) $\frac{1 - a^s}{s} < \frac{1 - a^\gamma}{\gamma}$ عندما $0 < a < 1$

(جـ) برهن أنه أيا كان العدد a الذي يكبر 1 ، فإن

(i) المتوالية $\{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)\}$ متناقصة تماما ومتقاربة .

(ii) المتوالية $\{n(1 - a^{-\frac{1}{n}})\}$ متزايدة تماماً ومتقاربة من نفس نهاية المتوالية في (i) .

برهن أنه أيا كان العدد الموجب a ، فإن

(iii) المتوالية $\{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)\}$ متقاربة .

(٤ — ٢٨)

نقول عن متوالية $\{a_n\}, n \in N$ **إنها مطردة بعد عدة حدود ، إذا وجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث تكون المتوالية** $\{a_{n+n_0-1}\}, n \in N$ **مطردة ، وهذا يعني أن المتوالية** $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots$ **متوالية مطردة .**

لنفترض الآن $0 < a < 1$. بين عندئذ أن المتوالية $\{u_n\}, n \in N$ ، حيث $u_n = na^n$ ،متناقصة في بعد عدة حدود ومحدودة من الأدنى بالعدد 0 . استنتج من ملاحظة أن $u_{n+1} = \frac{n+1}{n} a u_n$ أن $\lim_{n\to\infty} (na^n) = 0$.

ما هو وضع المتوالية في الحالة $|a| < 1$ ، وفي الحالة $|a| < 1$ ؟

(٤ — ٢٩)

إذا سرناعلى منوال المسألة السابقة ، فأثبت أنه أيا كان العدد العادي p ، فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\lim_{n\to\infty} (n^p a^n) = 0$ ، هو $|a| < 1$.

هل المتواليات التالية $\{a_n\}, n \in N$ متقاربة

(i) $a_n = \frac{n}{2^n}$

(ii) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

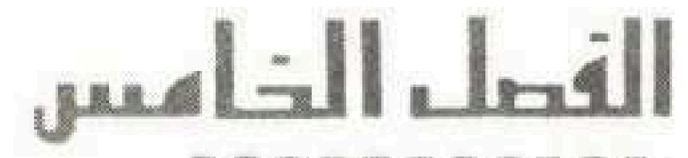
(iii) $a_n = n\left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right]^n$

(iv) $a_n = \frac{n^2}{3^n} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(٤ — ٣٠)

أثبت أنه أياًكان العدد الحقيقي a ، فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$





الدوال المستمرة من فضاء متري الى آخر

Continuous Functions of a Metric into another

لا بد أن يكون الطالب قد عرض لمفهوم استمرار الدوال الحقيقية للمتغير الحقيقي، وذلك في باكورة عهده بدراسة مبادىء علم الحساب التفاضلي والتكاملي . وإذا رغبنا في وصف غير دقيق لدالة مستمرة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ في النقطة x_o ، قلنا إنها الدالة التي تحافظ على قرب إحداها من الاخرى ، بمعنى أن f تنقل النقاط القريبة بصورة كافية من x_o إلى نقاط قريبة من $f(x_o)$ بقدر ما نشاء . وواضح أن العنصر الأساسي في هذا التعريف هو المسافة بين نقاط $\mathbb{R}$. إن هذا يهيب بنا إلى تعميم مفهوم الاستمرار ، بحيث يشمل الدوال من فضاء متري إلى آخر ، دون أن يكون هذان الفضاءان حقيقيين بالضرورة ، وبحيث يستنتج التعريف التقليدي لاستمرار الدوال الحقيقية للمتحول الحقيقي من هذا التعريف المعمم للاستمرار .

٥,١ — تعاريف ونظريات أساسية

Basic Definitions and Theorems

٥,١١ — تعاريف

ليكن (X,D) و (Y,D') فضاءين متريين . نقول عن دالة $f: X \to Y$ إنها **مستمرة في النقطة** x_o من X ، إذا قابل كلّ عدد موجب ε عددٌ موجبٌ δ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من X و $x \in N(x_o, \delta)$ ، فإن $f(x) \in N(f(x_o), \varepsilon)$. وإذا كانت f مستمرة في كل نقطة x من X ، فإنه يقال بأن f دالة **مستمرة** (من الفضاء (X,D) إلى الفضاء (Y,D') ، أو اختصاراً إن f دالة مستمرة على X . وبعبارة أخرى ، فإن $f: X \to Y$ تكون مستمرة في x_o من X ، إذا قابل العددَ الموجب ε عددٌ موجبٌ δ ، بحيث إذا كان x عنصراً من X يحقق المتراجحة $D(x, x_o) < \delta$ ، فإن $D'(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$.

هذا ، وفي الحالة التي يكون فيها كل من (X,D) و (Y,D') الفضاء المألوف $\mathbb{R}$ ، فإن التعريف يأخذ الشكل التالي : نقول عن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ إنها مستمرة في النقطة x_o إذا قابل كل عدد موجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه اذا كان x عنصراً من X و $|x-x_o|<\delta$ ، فإن $|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$. وبعبارة أخرى ، فإن التعريف السابق يغدو التعريف التقليدي لاستمرار الدالة الحقيقية للمتغير الحقيقي .

هذا ، وإذا كانت f تقابلا ، فثمة دالة عكسية f^{-1} لـ Y على X. وفي هذه الحالة ، إذا كانت كلٌّ من f,f^{-1} مستمرة ، فإن f تدعى **هوميومورفيزما** ، أو **تطبيقاً توبولوجيا** أو **تقابلا ثنائي الاستمرار** ، ويقال عندئذ إن الفضاءين (X,D) و (Y,D') **هوميومورفيان** أو **متكافئان توبولوجيا** .

وإذا كان الفضاءان (X,D) و (Y,D') هوميومورفيين ، وتحقق فضلا عن ذلك الشرط $D(x,y)=D'(f(x),f(y))$ ، أيا كان x,y من X ، فإن f تدعى **دالة إيزومترية** . ويقال عندئذ عن الفضاءين الهوميومورفيين (X,D) و (Y,D') إنهما **إيزومتريان** .

وتجدر بنا الإشارة إلى أن العلاقات المترية في الفضاءين الإيزومتريين واحدة ، ولعل وجه الاختلاف بينهما يكمن في طبيعة عناصرهما ، الأمر الذي يعتبر غير ذي بال في نظرية الفضاءات المترية ، لذا يعتبر الفضاءان الايزومتريان متطابقين .

٥,١٢ ــ أمثلة

(١) لنأخذ الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$ ، والفضاء الاقليدي ثنائي البعد $\mathbb{R}^2$. لنعرف دالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ بالدستور $f(x)=(x,x)$ ، أيا كان العدد الحقيقي x ، ولنبين أن f مستمرة . في الحقيقة ، ليكن y عنصراً اختيارياً من R و ε عددا موجبا ما ، ولنختر العدد $\delta=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. إذا رمزنا بـ D للمترك الإقليدي على R^2 ، فإننا نلاحظ أن

$$|x-y|<\delta \Rightarrow \left[(x-y)^2+(x-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \Rightarrow D((x,x),(y,y))<\varepsilon$$

$$\Rightarrow D(f(x),f(y))<\varepsilon$$

وبالتالي ، فإن f مستمرة .

(٢) لنأخذ المجموعة R^n ، ولنعرف عليها أولاً المترك الإقليدي D (٣,١٤)، ثم المترك المنقطع G (٣,١٢) . عندئذ ، نحصل على الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$، وفضاء النقاط المنعزلة (R^n,G) . لنرمز بـ I للدالة المطابقة على المجموعة R^n ، ولنبين أن الدالة $I:(R^n,G)\to\mathbb{R}^n$ مستمرة .

في الحقيقة ، ليكن y عنصراً اختيارياً من R^n و ε عددا موجبا ما ، ولنختر العدد δ مساوياً للعدد 1 . لما كان

$$G(x,y) < 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow D(x,y) = 0 \Rightarrow D(I(x), I(y)) = 0 < \varepsilon$$

فإن $I : (R^n, G) \to \mathbb{R}^n$ مستمرة .

لنرمز الآن للدالة المطابقة على المجموعة R^n بـ i ، ولنبين أن الدالة $i : \mathbb{R}^n \to (R^n, G)$ غير مستمرة . لنفرض جدلا أن i مستمرة ، وليكن $\varepsilon = 1$. عندئذ ، هنالك عدد موجب δ بحيث ،

$$D(x,y) < \delta \Rightarrow G(i(x), i(y)) < 1$$

لنختر العنصرين x,y من R^n اللذين يحققان المتراجحة $D(x,y) < \delta$ ، بحيث يكون $x \neq y$ ، (من الواضح وجود مثل هذه النقاط) . عندئذ يكون

$$G(i(x), i(y)) < 1 \Rightarrow G(x,y) < 1 \Rightarrow x = y$$

وهكذا ، فإن تسليمنا باستمرار الدالة المطابقة $i : \mathbb{R}^n \to (R^n, G)$ يوقعنا في تناقض . وبالتالي ، فإن هذه الدالة المطابقة غير مستمرة .

يبين هذا المثال بجلاء أن استمرار دالة،من الفضاء المتري (X,D) إلى فضاء متري آخر (Y,D')،لا يتحدد بهذه الدالة فحسب ، بل وبدالتي المسافة D,D' كذلك .

(٣) ليكن α عدداً حقيقياً موجبا ، ولتكن $f : (X,D) \to (Y,D')$ دالة غامرة ، بحيث $D(x,y) = \alpha D'(f(x), f(y))$ أياكان x,y من X . سنبين أن f هوميومورفيزم . نلاحظ أولاً أن f متباينة ، ذلك أن :

$$f(x) = f(y) \Rightarrow D'(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow \alpha D'(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

لنفرض الآن x عنصراً ما من X ، و ε عدداً موجبا ما ، ولنختر $\delta = \alpha\varepsilon$. لما كان $D(x,y) < \delta \Rightarrow D'(f(x), f(y)) < \frac{\delta}{\alpha} = \varepsilon$ ، فإن f مستمرة .

ليكن z عنصراً ما من Y و ε عددا موجبا ما ، ولنختر $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$. لما كان

$$D'(z,u) < \delta \Rightarrow D(f^{-1}(z), f^{-1}(u)) < \alpha\delta = \varepsilon$$

فإن f^{-1} مستمرة كذلك ، وبالتالي ، فإن f هوميومورفيزم .

إذا عدنا إلى تعريف نهاية دالة من فضاء متري إلى آخر ، فإننا نلمس تقارباً بين هذا التعريف ، وتعريف استمرار هذه الدالة . وعلى وجه التحديد ترد النظريتان التاليتان .

٥,١٣ — نظرية

إذا كانت الدالة f من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') مستمرة في النقطة x_o من X ، وكانت x_o نقطة حدية لـ X ، فإن $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$

البرهان

يترتب على كون الدالة f مستمرة في x_o ، أنه يقابل كل كرة مفتوحة $N(f(x_o),\varepsilon)$ كرة مفتوحة $N(x_o,\delta)$، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من X منتميا إلى $N(x_o,\delta)$ ، فإن $f(x)\in N(f(x_o),\varepsilon)$. يتعين على هذا أنه إذا كان x عنصراً من X منتميا إلى $N'(x_o,\delta)$ (وهذا العنصر موجود لأن x_o نقطة حدية لـ X فرضاً) ، فإن f(x) عنصر من $N(f(x_o),\varepsilon)$ ، وهذا يعني استنادا إلى (٤,١١) ، أن $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.■

٥,١٤ — نظرية

لتكن f دالة من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') ،ولتكن x_o نقطة حدية لـ x وتنتمي إلى X . فإذا كان $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$ ، فإن f دالة مستمرة في x_o .

البرهان

لتكن $N(f(x_o),\varepsilon)$ كرة مفتوحة اختيارية مركزها $f(x_o)$ في Y . اذن نجد استنادا إلى (٤,١١) ، أن ثمة كرة مفتوحة $N(x_o,\delta)$ مركزها x_o ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من X ينتمي إلى $N'(x_o,\delta)$ ، فإن f(x) عنصر من $N(f(x_o),\varepsilon)$. ليكن x عنصراً من X منتمياً إلى $N(x_o,\delta)$. فإذا كان $x = x_o$ ، فإن $f(x)\in N(f(x_o),\varepsilon)$ (لأن أي كرة مفتوحة تحوي مركزها) . وإذا كان $x \neq x_o$ ، فإن $x\in N'(x_o,\delta)$ ، وبالتالي فإن $f(x)\in N(f(x_o),\varepsilon)$ أيضاً . وهذا يعني أنه إذا كان x عنصراً من X منتمياً إلى $N(x_o,\delta)$ ، فإن $f(x)\in N(f(x_o),\varepsilon)$ ، لذا فإن f مستمرة في النقطة x_o. ■

وتجدر بنا الإشارة إلى أن كل نقطة x_o من X ليست حدية لـ X ، لا بد أن تكون نقطة استمرار لـ f ، ذلك أنه إذا لم تتحقق هذه الدعوى،لوجدنا استنادا إلى (٥,١١) عددا موجبا ε_o ، بحيث أنه إذا كان δ أي عدد موجب فهنالك عنصر x من $N(x_o,\delta)$ ، بحيث يكون $f(x)\notin N(f(x_o),\varepsilon_o)$. ومعنى هذا ، أنه أيا كانت الكرة المفتوحة $N(x_o,\delta)$ التي مركزها x_o،فثمة عنصر x **مغاير** لـ x_o،بحيث $x\in N(x_o,\delta)$ ، أي أن x_o نقطة حدية لـ X ، وهذا خلاف الفرض .

نستنتج من النظريتين السابقتين ، بأنه في حال كون x_o نقطة حدية لـ X ومنتمية إلى X ، فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون f مستمرة في x_o هو أن يكون $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$. ومن الجدير بالملاحظة ، أنه بالامكان صياغة هذا الشرط بالشكل $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(\lim_{x\to x_o} x)$. وهكذا ، فإذا كانت f دالة مستمرة في النقطة x_o ، فتصح المبادلة بين موضعي رمز النهاية $\lim_{x\to x_o}$ ورمز الدالة f .

سنورد الآن نظرية تحدد الدوال المستمرة بلغة الكرات المفتوحة .

٥,١٥ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة f من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') مستمرة في النقطة x_o من X هو أن يقابل كلّ كرة مفتوحة $N(f(x_o),\varepsilon)$ مركزها $f(x_o)$ في Y، كرة مفتوحة $N(x_o,\delta)$ مركزها x_o في X . بحيث يكون $f(N(x_o,\delta)) \subseteq N(f(x_o),\varepsilon)$.

البرهان :

لنفرض أن f مستمرة في x_o من X . إذن يقابل العدد الموجب ε ، عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من X و $D(x,x_o) < \delta$ ، فإن $D'(f(x),f(x_o)) < \varepsilon$. ويترتب على هذا ، أنه إذا كان $x \in N(x_o,\delta)$ ، فإن $f(x) \in N(f(x_o),\varepsilon)$. وبالتالي ، يكون $f(N(x_o,\delta)) \subseteq N(f(x_o),\varepsilon)$.

وبالعكس ، لنفرض أنه يقابل كل كرة $N(f(x_o),\varepsilon)$ مركزها $f(x_o)$ في Y ، كرة $N(x_o,\delta)$ مركزها x_o في X . بحيث يكون $f(N(x_0,\delta)) \subseteq N(f(x_0),\varepsilon)$

إن هذا يعني أنه يقابل كلّ عدد موجب ε عدد موجب δ . بحيث

$$x \in N(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in N(f(x_0),\varepsilon)$$

أو

$$D(x_0,x) < \delta \Rightarrow D'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

أي أن f مستمرة في النقطة x_o . ■

٥,١٦ — نتيجة

يترتب على النظرية السابقة أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة f من الفضاء المتري (X,D) في الفضاء المتري (Y,D') مستمرة،هو أن يقابل كلّ عنصر x من X ، وكلّ عدد موجب ε،عدد موجب δ (تابع في الحالة العامة لـ ε,x) . بحيث يكون $f(N(x,\delta)) \subseteq N(f(x),\varepsilon)$.

وفضلاً عن إمكان التعبير عن الدوال المستمرة بلغة الكرات المفتوحة ، فمن الممكن استخدام لغة المجموعات المفتوحة أو المغلقة في تحديد الاستمرار . وأولى هذه النظريات تعميم للنتيجة السابقة .

٥,١٧ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة f من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') مستمرة، هو أن يقابل كلّ عنصر x من X ، وكلّ جوار V لـ $f(x)$ جوار U لـ x ، بحيث $f(U) \subseteq V$.

البرهان

لنفرض أولا أن f مستمرة، ولتكن x نقطة اختيارية من X . فاذا كان V جوارا لـ $f(x)$ ، فهنالك كرة مفتوحة $N(f(x),\varepsilon)$ مركزها $f(x)$ ، بحيث $N(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. لكن f مستمرة ، إذن نجد استنادا إلى (٥.١٥) ، أن هنالك كرة مفتوحة $N(x,\delta)$ مركزها x ، بحيث $f(N(x,\delta)) \subseteq N(f(x),\varepsilon)$ وهذا يعني أن هنالك جواراً لـ x هو $U = N(x,\delta)$ ، بحيث $f(U) \subseteq V$.

وبالعكس ، لنفترض أن شرط النظرية محقق . إذن يقابل الكرةَ المفتوحةَ $N(f(x),\varepsilon)$ جوار U لـ x ، بحيث $f(U) \subseteq N(f(x),\varepsilon)$. ولما كانت U مفتوحة ، و $x \in U$ ، إذن هنالك كرة مفتوحة $N(x,\delta)$ مركزها x ، بحيث $N(x,\delta) \subseteq U$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن $f(N(x,\delta)) \subseteq f(U) \subseteq N(f(x),\varepsilon)$ ، أي أن f مستمرة (٥.١٦) . ■

٥,١٨ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة f من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') مستمرة ، هو أن يكون الخيال العكسي وفق f لأي مجموعة مفتوحة في (Y,D') مجموعة مفتوحة في (X,D) .

البرهان

لنفرض أولا أن f مستمرة ، ولنبرهن أنه أيا كانت المجموعة المفتوحة U في (Y,D') ، فإن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في (X,D) . فإذا كانت $f^{-1}(U)$ خالية ، فإنها مفتوحة . أما إذا كانت $f^{-1}(U)$ غير خالية ، ورمزنا بـ x لعنصر اختياري منها ، فإن $f(x)$ محتوى في U . ولما كانت U مفتوحة ، فثمة كرة مفتوحة $N(f(x),\varepsilon)$ مركزها $f(x)$ محتواة في U . وبما أن f مستمرة، فهنالك كرة مفتوحة $N(x,\delta)$ مركزها x ، بحيث $f(N(x,\delta)) \subseteq N(f(x),\varepsilon)$. ويترتب على هذا أن $f(N(x,\delta)) \subseteq U$ ، إذن $N(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$. وهكذا نكون قد وجدنا أنه يقابل كلّ عنصر x من $f^{-1}(U)$ كرة مفتوحة $N(x,\delta)$ ، مركزها x ، محتواة في $f^{-1}(U)$ ، وهذا يعني أن $f^{-1}(U)$ مفتوحة .

وبالعكس ، لنفرض أنه أيا كانت المجموعة المفتوحة U في (Y,D') ، فإن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في (X,D) ، ولنبرهن على أن f مستمرة . لتكن x نقطة اختيارية من X ، ولتكن $N(f(x),\varepsilon)$ كرة مفتوحة اختيارية مركزها $f(x)$ في Y . لما كانت كل كرة مفتوحة مجموعة مفتوحة ، فإن $f^{-1}(N(f(x),\varepsilon))$ مجموعة مفتوحة في X ، وهذه المجموعة تحوي x . وبالتالي ، فهنالك كرة مفتوحة $N(x,\delta)$ مركزها x ، بحيث $N(x,\delta) \subseteq f^{-1}(N(f(x),\varepsilon))$ ، الأمر الذي يترتب

عليه أن $f(N(x,\delta)) \subseteq N(f(x),\varepsilon)$. ويعني هذا ، استنادا إلى (٥,١٦)،أن f مستمرة في النقطة x . وبما أن x نقطة اختيارية من X ، فإن f مستمرة . ■

٥,١٩ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة f من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') مستمرة ، هو أن يكون الخيال العكسي وفق f ،لأي مجموعة مغلقة في (Y,D') ، مجموعة مغلقة في (X,D) .

البرهان

لنفرض أولاً أن f مستمرة ، و F مجموعة مغلقة اختيارية من (Y,D') . عندئذ ، تكون $Y-F$ مفتوحة في هذا الفضاء . وبالتالي ، واستناداً إلى النظرية (٥,١٨) ، تكون $f^{-1}(Y-F)$ مجموعة مفتوحة . ولما كانت المجموعة الأخيرة تساوي $X-f^{-1}(F)$ ، فإن $f^{-1}(F)$ مغلقة في (X,D) .

وبالعكس ، لنفرض أنه أيا كانت المجموعة المغلقة F في (Y,D') ، فإن $f^{-1}(F)$ مغلقة في (X,D) . سنبين عندئذ أن f مستمرة . لتكن U مجموعة مفتوحة اختيارية في (Y,D') . إذن هناك مجموعة مغلقة F في هذا الفضاء ، بحيث $F=Y-U$. لكن المجموعة $f^{-1}(F) = f^{-1}(Y-U) = X-f^{-1}(U)$ مغلقة فرضا في (X,D) ، إذن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في (X,D) . وهكذا نكون قد وجدنا أن الخيال العكسي $f^{-1}(U)$ لكل مجموعةٍ U مفتوحةٍ في (Y,D') ، هو مجموعة مفتوحة في (X,D) ، وبالتالي فإن f مستمرة . ■

ويجدر بنا التنبيه إلى أنه ليس من الضروري أن يكون خيال مجموعة مفتوحة (مغلقة) وفق دالة مستمرة مجموعة مفتوحة (مغلقة) . وعلى سبيل المثال ، فإن خيال المجموعة المفتوحة $]-1,1[$ وفق الدالة المستمرة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالدستور $f(x)=x^2$ ،هو المجموعة غير المفتوحة $[0,1[$. كذلك ، فإن خيال المجموعة المغلقة $[1,+\infty[$ وفق الدالة المستمرة $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ المعرفة بالدستور $g(x)=\frac{1}{x}$ ، هو المجموعة غير المغلقة $]0,1]$.

هذا ، ويمكن تحديد الدوال المستمرة بلغة المتواليات المتقاربة كما تبين النظرية التالية .

٥,١٩١ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة f من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') مستمرة في النقطة x_o من X ، هو أن يقابل كلَّ متوالية $\{x_n\}, n\in N$ في X متقاربةٍ من x_o متواليةُ $\{f(x_n)\}, n\in N$ في Y متقاربة من $f(x_o)$.

البرهان

لنفرض أولاً f مستمرة في النقطة x_o . لتكن $\{x_n\}, n\in N$ متوالية في X متقاربة من x_o ، ولنبرهن على أن $\{f(x_n)\}, n\in N$ متقاربة من $f(x_o)$ في Y . لما كانت f مستمرة في x_o ، فإنه يقابل العدد الموجب الاختياري ε ، عدد موجب δ ، بحيث $D(x_o,x) < \delta \Rightarrow D'(f(x_o),f(x)) < \varepsilon$. وبما أن $x_n \to x_o$ ، فهنالك عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow D(x_o,x_n) < \delta$. ويترتب على هذا ، أنه يقابل العدد الموجب الاختياري ε ، عددٌ صحيح موجب N_ε ، بحيث $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow D'(f(x_o),f(x_n)) < \varepsilon$. وهذا يعني أن $f(x_n) \to f(x_o)$.

وبالعكس ، لنفرض أنه يقابل كلّ متواليةٍ $\{x_n\}, n\in N$ في X متقاربةٍ من x_o ، متوالية $\{f(x_n)\}, n\in N$ في Y متقاربة من $f(x_o)$ ، ولنبرهن أن f مستمرة في النقطة x_o .

لنفرض مؤقتاً ، أن f غير مستمرة في النقطة x_o . عندئذ ، نجد إستناداً الى النظرية (٥.١٦) أن هنالك كرة مفتوحة $N(f(x_o),\varepsilon)$ مركزها $f(x_o)$ بحيث لا يمكن لخيال أي جوار لـ x_o أن يكون محتوى في $N(f(x_o),\varepsilon)$. لنأخذ متوالية الجوارات $\{N(x_o,\frac{1}{n})\}, n\in N$ ولنشكل المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ ، بحيث $x_n \in N(x_o,\frac{1}{n})$ ، و $f(x_n) \notin N(f(x_o),\varepsilon)$. من الواضح أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$ في حين $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_o)$. ولما كان هذا مناقضا للفرض ، فإن f مستمرة في x_o . ■

٥,١٩٢ — نتيجة

يترتب على النظرية السابقة ، أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة f من فضاءِ المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') مستمرة هو التالي : أيا كان العنصر x من X ، وأياً كانت المتوالية $\{x_n\}, n\in N$ في X المتقاربة من x ، فالمتوالية $\{f(x_n)\}, n\in N$ في Y ، متقاربة من $f(x)$.

يمكننا القول ، استنادا إلى النظرية السابقة ، بأن الدالة المستمرة من فضاء متري إلى فضاء متري آخر، هي تلك التي تحول المتواليات المتقاربة في الفضاء الأول إلى أخرى متقاربة في الفضاء الثاني وبعبارة أخرى فإن الدالة المستمرة هي تلك التي تحفظ التقارب .

٥,١٩٣ — نظرية

لتكن f دالة مستمرة من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') و g دالة مستمرة من الفضاء المتري (Y,D') إلى الفضاء المتري (Z,D'') . عندئذ ، تكون $g\circ f$ دالة مستمرة من (X,D) إلى (Z,D''). وإذا كانت كل من f,g هوميومورفيزما ، فإن $g\circ f$ تكون هوميومورفيزما كذلك .

البرهان

لتكن U مجموعة مفتوحة ما في (Z,D'') . لما كانت g مستمرة ، فإن $g^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في (Y,D') (٥,١٨) . لكن f مستمرة أيضاً ، لذا فإن $f^{-1}(g^{-1}(U))$ مجموعة مفتوحة في (X,D) . وبما أن المجموعة الاخيرة هي $(g\circ f)^{-1}(U)$ ، فإننا نستنتج أن الخيال العكسي لأي مجموعة مفتوحة في (Z,D'') وفق $g\circ f$ هو مجموعة مفتوحة في (X,D) . إذن $g\circ f$ مستمرة .

لنفرض الآن أن كلاًّ من f,g هوميومورفيزم . لما كانت f,g دالتين متباينتين وغامرتين ، فإن $g\circ f: X\to Z$ متباينة وغامرة . وبما أن كلاًّ من g^{-1} , f^{-1} و f,g مستمر ، فإن $g\circ f$ و $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ مستمرتان ، وبالتالي ، فإن $g\circ f$ هوميومورفيزم . ■

سنورد الآن نظريتين تبينان أن الدوال المستمرة تحفظ التراص والاتصال .

٥,١٩٤ — نظرية

إذا كانت f دالة مستمرة من الفضاء المتراص (X,D) إلى الفضاء (Y,D') ، فإن $f(X)$ مجموعة جزئية متراصة في (Y,D')

البرهان

لنفترض $\{U_i ; i\in I\}$ أي تغطية مفتوحة لـ $f(X)$. لما كانت f مستمرة ،فإن $\{f^{-1}(U_i)\} , i\in I\}$ تغطية مفتوحة لـ (X,D) . وبما أن (X,D) متراص ، فيمكن إيجاد عدد منته من العناصر U_i مثل $U_{i_1},\dots,U_{i_n}$ بحيث تشكل $\{f^{-1}(U_{i_1}),\dots,f^{-1}(U_{i_n})\}$ تغطية لـ(X,D) ، أي إن $X = f^{-1}(U_{i_1})\cup\dots\cup f^{-1}(U_{i_n})$. ويترتب على هذا أن

$$f(X) = f\left(f^{-1}(U_{i_1})\cup\dots\cup f^{-1}(U_{i_n})\right) = f\left(f^{-1}(U_{i_1})\right)\cup\dots\cup f\left(f^{-1}(U_{i_n})\right)\subseteq$$

$$\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_n}$$

وهذا يعني أن $\{U_{i_1},\dots,U_{i_n}\}$ تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة الاختيارية $\{U_i , i\in I\}$ ؛ إذن $f(X)$ مجموعة متراصة . ■

٥,١٩٥ — نتيجة

يترتب على النظرية السابقة أنه إذا كانت f دالة غامرة ومستمرة من الفضاء المتراص (X,D) على الفضاء (Y,D') فإن (Y,D') فضاء متراص . نستنتج كذلك أنه إذا كان (X,D) ، و (Y,D') فضاءين هوميومورفيين ، وكان أحد هذين الفضاءين متراصا ، فإن الفضاء الآخر متراص بالضرورة .

٥,١٩٦ — نظرية

إذا كانت f دالة مستمرة من للفضاء المتصل (X,D) إلى الفضاء (Y,D') ، فإن f(X) مجموعة جزئية متصلة في (Y,D')

البرهان

لنفرض جدلاً أن f(X) ليست متصلة . إذن $f(X) = S \cup T$ ، حيث S,T مجموعتان جزئيتان من f(X) غير خاليتين منفصلتان ومفتوحتان في f(X) . واستنادا إلى تعريف المجموعات المفتوحة في الفضاءات الجزئية . فهنالك مجموعتان U,V مفتوحتان في Y ، بحيث $S = f(X) \cap U$ و $T = f(X) \cap V$. لكن

$$f^{-1}(S) = f^{-1}(f(X) \cap U) = f^{-1}(f(X)) \cap f^{-1}(U) = X \cap f^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

ونجد بصورة مماثلة أن $f^{-1}(T) = f^{-1}(V)$. ولما كان من الواضح بأن $X = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$. فإن $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. وبما أن S,T غير خاليتين ومنفصلتان ، فإن $f^{-1}(S)$ و $f^{-1}(T)$ غير خاليتين ومنفصلتان ، وبالتالي فإن $f^{-1}(V)$ و $f^{-1}(U)$ غير خاليتين ومنفصلتان . وإذا أضفنا إلى هذا ان المجموعتين الأخيرتين مفتوحتان في X (لأن $f: X \to Y$ مستمر) ، فإننا نستنتج أن (X,D) فضاء غير متصل ، وهذا خلاف الفرض . وبالتالي ، فلا بد أن تكون المجموعة الجزئية f(X) متصلة في (Y,D') . ∎

٥,١٩٧ — نتيجة

يترتب على النظرية السابقة ، أنه إذا كانت f دالة غامرة ومستمرة من الفضاء المتصل (X,D) على الفضاء (Y,D') ، فإن (Y,D') فضاء متصل . نستنتج كذلك ، أنه إذا كان (X,D) و (Y,D') فضاءين هوميومورفيين ، وكان أحد هذين الفضاءين متصلا ، فإن الفضاء الآخر متصل بالضرورة .

٥,٢ ـــ الاستمرار المنتظم

Uniform Çontinuity

لتكن f دالة للفضاء المتري (X,D) في الفضاء المتري (Y,D') . من المعلوم ، أنه إذا كانت f مستمرة ، فإنه يقابل كلّ نقطة x_o من X ، وكلّ عدد موجب ε، عدد موجب δ (تابع لـ x_o و ε) ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من X و $D(x,x_o) < \delta$ فإن $D'(f(x),f(x_o)) < \varepsilon$. ويرد في هذا المقام السؤال التالي : إذا كان ε عددا موجبا اختياريا ، **فهل** يمكن إيجاد عدد موجب δ ، تابع لـ ε فقط ، بحيث يتحقق الشرط السابق ، أيا كان x_o من X ؟

من الممكن إيراد أمثلة لدوال يتحقق فيها المتطلب السابق ، ودوال أخرى لا يتحقق فيها هذا المتطلب . إن صف الدوال من النمط الأول تدعى **الدوال منتظمة الاستمرار** (**أو شاملة الاستمرار**) .

٥,٢١ ـــ تعريف

ليكن (X,D) و (Y,D') فضاءين متريين ، و f دالة لـ X في Y . نقول إن f دالة منتظمة الاستمرار من الفضاء (X,D) إلى الفضاء (Y,D') .(أو على (X,D) ، أو اختصاراً على X) ، إذا قابل كلّ عدد موجب ε ، عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x,x' عنصرين من X بحيث $D(x,x') < \delta$ ، فإن $D'(f(x),f(x')) < \varepsilon$.

٥,٢٢ ـــ مثال

لتكن $f:[0,1] \to R$ دالة معرفة بالدستور $f(x)=x^2$ ، سنبين أن f منتظمة الاستمرار على [0,1] . باعتبار [0,1] فضاء جزئيا من $\mathbb{R}$. نلاحظ أن :

$$|f(x)-f(x')| = |x^2-x'^2| = |x-x'||x+x'| \leq$$

$$\leq (|x|+|x'|)|x-x'| \leq 2|x-x'|$$

نستنتج من هذا أنه إذا كان $|x-x'| < \frac{\varepsilon}{2}$ ، فإن $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$.

وهكذا ، نكون قد وجدنا أن شرط انتظام الاستمرار محقق ، إذ وجدنا أن العدد الموجب δ ، الذي يقابل العدد الموجب الاختياري ε ، هو $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

٥,٢٣ — مثال

سنبين أن الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالدستور $f(x) = x^2$ ليست منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$.

لو فرضنا جدلاً ، أن f منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$ ، لقابل العدد $\varepsilon = 1$ ، عدد موجب δ ، بحيث أن المتراجحة $|x - x'| < \delta$ تقتضي المتراجحة $|f(x) - f(x')| < 1$. لنفرض الآن $x > 0$ و $x' = x + \frac{\delta}{2}$ ، عندئذ يكون $|x - x'| < \delta$ ، كما نجد :

$$|f(x) - f(x')| = |x + x'|\,|x - x'| = |2x + \frac{\delta}{2}|\,|\frac{\delta}{2}| =$$

$$= \frac{1}{4}(4x + \delta)\,\delta > \frac{1}{4}(4x)\,\delta = x\delta$$

فإذا فرضنا $x = \frac{1}{\delta}$ ، وجدنا $|f(x) - f(x')| > 1$ ، في حين يجب أن يكون $|f(x) - f(x')| < 1$. وبالتالي . فلا يمكن أن تكون f منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$ (رغم كونها مستمرة على $\mathbb{R}$) .

٥,٢٤ — مثال

يمكن التحقق بسهولة ، من أن الدالة الايزومترية لفضاء متري في فضاء متري آخر منتظمة الاستمرار .

نستنتج من تعريف الاستمرار المنتظم ، أن كل دالة منتظمة الاستمرار مستمرة . بيد أن العكس غير صحيح ، كما يبين المثال (٥,٢٣) .

سنبين الآن ، أن الشق الأول من النظرية (٥,١٩٣) ، يبقى صحيحاً ليس عندما تكون الدالتان f,g مستمرتين فحسب ، بل ومنتظمتي الاستمرار كذلك .

٥,٢٥ — نظرية

ليكن f دالة منتظمة الاستمرار من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') و g دالة منتظمة الاستمرار من الفضاء المتري (Y,D') إلى الفضاء المتري (Z,D'') .عندئذ ، تكون $g \circ f$ دالة منتظمة الاستمرار من (X,D) إلى (Z,D'') .

البرهان

ليكن ε عدداً موجبا ما . لما كانت g منتظمة الاستمرار ، فثمة عدد موجب η ، بحيث $D'(y,y') < \eta \Rightarrow D''(g(y),g(y')) < \varepsilon$. وبما أن f منتظمة الاستمرار كذلك ، فثمة عدد موجب δ ، بحيث

$$D(x,x') < \delta \Rightarrow D'(f(x),f(x')) < \eta$$

ويترتب على هذين الاقتضاءين ، أن لكل عدد موجب ε ، عددا موجبا δ ، بحيث أن $D(x,x') < \delta \Rightarrow D''((g\circ f)(x),(g\circ f)(x')) < \varepsilon$.ويعني هذا ، استنادا إلى التعريف (٥,٢١) ، أن $g\circ f$ دالة منتظمة الاستمرار لـ (X,D) في (Z,D'') . ∎

على الرغم من أن الدالة المستمرة ليست بالضرورة منتظمة الاستمرار ، إلا أن النظرية الهامة التالية تقرر أن لا فرق بين الاستمرار والاستمرار المنتظم على الفضاءات المتراصة .

٥,٢٦ — نظرية

إذا كانت $f:(X,D)\to(Y,D')$ دالة مستمرة من الفضاء المتراص (X,D) إلى الفضاء (Y,D') ، فإن f دالة منتظمة الاستمرار على X .

البرهان

ليكن ε عددا موجبا ما . لما كانت الدالة f مستمرة على X ، فإنه يقابل ε ، وكل عنصر z من X،عدد موجب η (تابع في الحالة العامة لـ z,ε) ، بحيث أنه إذا كان x عنصراً من X يحقق الشرط $D(x,z) < \eta$ ، فإن $D'(f(x),f(z)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. وهذا يعني أنه إذا كان x عنصراً من الكرة المفتوحة $N(z,\eta)$ ، فإن $f(x) \in N(f(z),\frac{1}{2}\varepsilon)$. من الواضح أنه عندما يمسح العنصر z المجموعة X ، فإن جماعة الكرات $N(z,\frac{\eta}{2})$ تشكل تغطية مفتوحة لـ X . ولما كان (X,D) فضاء متراصا ، فإن هذه التغطية لا بد وأن تحتوي تغطية جزئية منتهية . ولتكن $\{ N(z_i,\frac{\eta_i}{2}) , i = 1,2,\ldots,n\}$. ليكن $\delta = \frac{1}{2}\min\{\eta_1,\ldots,\eta_n\} > 0$،وليكن x, x' عنصرين من X ، بحيث $D(x,x') < \delta$.
إن x لا بد وأن تنتمي إلى أحد الكرات المفتوحة . ولتكن مثلاً الكرة $N(z_i,\frac{\eta_i}{2})$، عندئذ يكون $D(x,z_i) < \frac{\eta_i}{2}$. يترتب على هذه المتراجحة ، وعلى كون $D(x,x') < \delta$، أن $D(x',z_i) < \eta_i$. وبالتالي فإن

$$D'(f(x), f(x')) \leqslant D'(f(x), f(z_i)) + D'(f(x'), f(z_i)) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

وهكذا نكون قد وجدنا أنه يقابل العدد الموجب الاختياري ε ، عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x,x' عنصرين من X و $D(x,x') < \delta$ ، فإن $D'(f(x),f(x')) < \varepsilon$. وهذا يعني أن f منتظمة الاستمرار على X (٥,٢١) . ∎

من أعقد المشاكل ، التي تجابهنا لدى محاولة معرفة ما إذا كانت دالة متباينة وغامرة f هوميومورفيزما ، مشكلة إثبات استمرار الدالة العكسية f^{-1} . وتوفر النظرية التالية حلا خاصا لهذه المسألة .

٥،٢٧ — نظرية

لتكن f دالة متباينة وغامرة من الفضاء المتراص (X,D) على الفضاء المتري (Y,D') . فإذا كانت f مستمرة على X ، (وبالتالي منتظمة الاستمرار على X) ، فإن f هوميومورفيزم .

البرهان

كي نبين أن f هوميومورفيزم ، يكفي إثبات استمرار f^{-1} . اذا كانت F أي مجموعة جزئية مغلقة في (X,D) ، فإن F متراصة (٣،٦٩١) ، وبالتالي فإن $f(F)$ متراصة كذلك (٥،١٩٤) . واستناداً الى (٣،٦٩٣) ، فإن $f(F)$ مغلقة في (Y,D') . لما كان $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ فإننا نستنتج أن الخيال العكسي وفق f^{-1} لأي مجموعة جزئية مغلقة F في (X,D) ، هو مجموعة مغلقة في (Y,D') ، لذا فإن f^{-1} مستمرة . ■

لقد رأينا عند دراستنا للاستمرار ، أن الدالة المستمرة من فضاء متري (X,D) إلى فضاء متري آخر (Y,D') ، تحفظ تقارب المتواليات ، بمعنى أنه إذا كانت $\{x_n\}, n\in N$ متوالية في (X,D) متقاربة من x_o ، فإن المتوالية $\{f(x_n)\}, n\in N$ لا بد وأن تتقارب من $f(x_o)$. وسنبين الآن ، أن الدالة المنتظمة الاستمرار لفضاء متري في آخر، تحفظ المتواليات الأساسية (متواليات كوشي) ، بغض النظر عن كون هذه المتواليات متقاربة أو متباعدة .

٥،٢٨ — نظرية :

إذا كانت f دالة منتظمة الاستمرار من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري (Y,D') ، وكانت $\{x_n\}, n\in N$ متوالية أساسية في (X,D) ، فإن $\{f(x_n)\}, n\in N$ ، لا بد وأن تكون متوالية أساسية في (Y,D') .

البرهان

ليكن ε عدداً موجبا ما . لما كانت f منتظمة الاستمرار ، فثمة عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x_1 و x_2 عنصرين من X يحققان الشرط $D(x_1,x_2) < \delta$ ، فإن $D'(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$. ولما كانت $\{x_n\}, n\in N$ متوالية أساسية في (X,D) ، فإنه يقابل العدد الموجب δ ، عدد صحيح موجب M ، بحيث أنه إذا كان m,n عددين صحيحين يحققان الشرطين $n \geq M$ و $m \geq M$ ، فإن $D(x_m, x_n) < \delta$. يترتب على هذا كله ، أنه يقابل العدد الموجب ε ، عدد صحيح موجب M ، بحيث أنه إذا كان m,n عددين صحيحين يحققان الشرطين $n \geq M$ و $m \geq M$ ، فإن $D'(f(x_m),f(x_n)) < \varepsilon$. الأمر الذي يعني أن $\{f(x_n)\}, n\in N$ متوالية أساسية في (Y,D') . ■

٥.٣ — الدوال المستمرة على الفضاءات الجزئية

Continuous Functions on Subspaces

سنورد الآن نظرية هامة تبحث في العلاقة بين استمرار دالة على فضاء متري . واستمرار مقصوريها على فضاءين جزئيين من هذا الفضاء .

٥.٣١ — نظرية

لتكن f دالة من الفضاء (X,D) إلى الفضاء (Y,D') ، وليكن $X = A \cup B$.لنفترض أن $f|B$ و $f|A$ (أي مقصوري f على A,B باعتبارهما فضاءين جزئيين من X) مستمران . فإذا كانت A , B مفتوحتين معاً ، أو مغلقتين معا (في X) ، فإن f مستمرة .

البرهان

سنقيم البرهان على هذه النظرية ، بافتراض A,B مفتوحتين معا ، تاركين معالجة الحالة ، التي تكون فيها A,B مغلقتين معا للقارىء . لتكن U مجموعة مفتوحة ما في Y ، ولنبرهن أن $f^{-1}(U)$ مفتوحة في X . لما كانت $f|A$ دالة مستمرة من الفضاء (A,D_A) إلى الفضاء (Y,D') ، وكانت U مفتوحة في Y . فإن $(f|A)^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في A (٥.١٨) . ونجد بصورة مماثلة أن $(f|B)^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في B . بيد أن كلاًّ من A,B مجموعة مفتوحة في X ، لذا فإن كلاًّ من $(f|B)^{-1}(U)$ و $(f|A)^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في X (لماذا؟) . وبما أن $X = A \cup B$ ،فإن $f^{-1}(U) = (f|A)^{-1}(U) \cup (f|B)^{-1}(U)$. ولما كان الطرف الأيمن من هذه المساواة اجتماعا لمجموعتين مفتوحتين في X ، فإن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في X ، أي أن f مستمرة .■

٥.٣٢ — مثال

لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$ ، ولنعرف دالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالدستور:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\text{عندما } x \geq 0) \\ -x & (\text{عندما } x < 0) \end{cases}$$

فإذا فرضنا $B = \{x : x \leq 0\}$, $A = \{x : x \geq 0\}$ ، فإن A,B مجموعتان مغلقتان في $\mathbb{R}$ ،كما أن $A \cup B = \mathbb{R}$. من الواضح أن كلاًّ من $f|B$ و $f|A$ مستمر ، وبالتالي فإن f نفسها مستمرة .

ويجدر بنا التوكيد ، بأن المجموعتين A,B في النظرية السابقة ينبغي أن تكونا مفتوحتين معا أو مغلقتين معا . ولا يجوز أن تكون إحداهما مغلقة والأخرى مفتوحة . وعلى سبيل المثال ، فإذا عرّفنا في المثال السابق بدلاً من f الدالة $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالدستور

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (\text{عندما } x > 0) \\ 1-x & (\text{عندما } x \leq 0) \end{cases}$$

وفرضنا $B = \{x : x \leq 0\}$ و $A = \{x : x > 0\}$ ، فإننا نلاحظ أن كلا من $g|B$ و $g|A$ مستمر . دون أن تكون g نفسها مستمرة ، وسبب ذلك يعود إلى أن A مفتوحة وB مغلقة .

سنورد أخيراً نظرية تجيب عن السؤالين التاليين :

(١) إذا كانت f دالة مستمرة من الفضاء (X,D) على فضاء جزئي من الفضاء (Z,D'') . فهل f مستمرة كدالة من (X,D) إلى (Z,D'') ؟

(٢) إذا كانت f دالة مستمرة من الفضاء (X,D) إلى الفضاء (Y,D') ، وكان (W,D_W) فضاء جزئياً من الفضاء (X,D) ، فهل $f|W$ مستمر ؟

٥.٣٣ — نظرية

لتكن f دالة مستمرة من الفضاء (X,D) إلى الفضاء (Y,D') عندئذ :

(١) اذا كان (Y,D') فضاء جزئياً من الفضاء (Z,D'') ، فإن f دالة مستمرة من الفضاء (X,D) إلى الفضاء (Z,D'') .

(٢) إذا كان (W,D_W) فضاء جزئياً من الفضاء (X,D) ، فإن $f|W$ دالة مستمرة من (W,D_W) إلى (Y,D') .

البرهان

(١) لتكن U مجموعة مفتوحة في Z . إذن $Y \cap U$ مفتوحة في Y ، وبالتالي فإن $f^{-1}(Y \cap U)$ مجموعة مفتوحة في X . لكن $f^{-1}(Y \cap U) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(U) = X \cap f^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ ، لذا ، فإن الخيال العكسي لأي مجموعة مفتوحة في Z ، هو مجموعة مفتوحة في X ، أي أن f دالة مستمرة من (X,D) إلى (Z,D'') .

(٢) لتكن U مجموعة مفتوحة في Y . إذن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في X ، وبالتالي فإن $W \cap f^{-1}(U)$ مفتوحة في W . لكن $W \cap f^{-1}(U) = (f|W)^{-1}(U)$ ، لذا فإن الخيال العكسي وفق الدالة $f|W$ لأي مجموعة مفتوحة في Y ، هو مجموعة مفتوحة في W ، أي أن $f|W$ دالة مستمرة من الفضاء (W,D_W) إلى الفضاء (Y,D') . ∎

تمـاريـن

(٥ — ١)

لتكن $f:(X,D)\to(Y,D')$ دالة تحقق الشرط $D(x,x')\geqslant kD'(f(x),f(x'))$ ، أياكان x,x' من X ، حيث k ثابت موجب . أثبت استمرار f على X .

(٥ — ٢)

لتكن $f:(X,D)\to(Y,D')$ دالة ثابتة . أثبت استمرار f . أفد من هذا كي تتحقق من أنه ليس ضرورياً أن يكون خيال كل مجموعة مفتوحة وفق دالة مستمرة مجموعة مفتوحة .

(٥ — ٣)

لتكن x_o نقطة مثبتة من فضاء متري (X,D) . أثبت أن الدالة $f:(X,D)\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x)=D(x,x_o)$ مستمرة على X .

(٥ — ٤)

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f:(X,D)\to(Y,D')$ مستمرة على X هو أن تكون الدالة $f:(X,D)\to(f(X),D'')$ مستمرة على X ، وذلك بفرض D'' المترك النسبي على $f(x)$.

(٥ — ٥)

لتكن X مجموعة ما و (Y,D') فضاء متريا ، ولتكن $f:X\to Y$ دالة متباينة وغامرة . أثبت أن الدالة $D:X\times X\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $D(x,y)=D'(f(x),f(y))$ تشكل متركاً على X . برهن بعد ذلك أن الدالة $f:(X,D)\to(Y,D')$ هوميومورفيزم .

(٥ — ٦)

لتكن $f:(X,D)\to(Y,D')$ دالة مستمرة . برهن أنه إذا كانت y نقطة ما من Y ، فإن المجموعة $\{x\in X:f(x)=y\}$ لا بد أن تكون مجموعة مغلقة في (X,D) .

(٥ — ٧)

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة الحقيقية f على الفضاء المتري (X,D) مستمرة على X ، هو أن تكون المجموعتان

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \qquad \{x \in X : f(x) < \beta\}$$

مفتوحتين في (X,D) . أيا كان العددان الحقيقيان α, β .

(٥ — ٨)

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مُوَسَّع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}^*$ (٢,٥٩٣) بالدستور:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x = -\infty \text{ عندما}) \\ \dfrac{x}{1+|x|} & (x \in R \text{ عندما}) \\ +1 & (x = +\infty \text{ عندما}) \end{cases}$$

برهن أن f هوميومورفيزم للفضاء $\mathbb{R}^*$ على الفضاء الجزئي $[-1,1]$ من $\mathbb{R}$.

(٥ — ٩)

ليكن (X,D) فضاء مترياً و x عنصراً من X و $\gamma > 0$. بين أن ثمة دالة مستمرة $f:(X,D) \to \mathbb{R}$ تحقق الخواص التالية : أيا كان y من X ، فإن (i) $0 < f(y) < 1$ ، (ii) $f(y) = 0$ إذا كان $y \notin N(x,\gamma)$ ، (iii) $f(x) = 1$.

(**إرشاد** . $f(y) = \max\{1 - \dfrac{D(x,y)}{\gamma}, 0\}$)

(٥ — ١٠)

ليكن (X,D) فضاء مترياً **غير** متراص . أثبت وجود دالة حقيقية مستمرة على (X,D) ، دون أن تكون هذه الدالة محدودة ، حيث نقصد بالدالة المحدودة تلك التي مداها مجموعة محدودة . (**إرشاد** . من الممكن الإفادة من التمرين السابق) .

(٥ — ١١)

إذا كانت $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين مستمرتين ، فإن الدالة $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ المحددة بالدستور $h(x) = (f(x), g(x))$ لا بد وأن تكون مستمرة .

(٥ — ١٢)

إذا كانت $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ دالة محددة بالدستور $f(x,y) = (x+y, x-y)$ ، فلا بد أن تكون f مستمرة على $\mathbb{R}^2$

(٥ — ١٣)

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور :

$$f(x) = \begin{cases} x & (\text{عندما } x \in R - Q) \\ 1 - x & (\text{عندما } x \in Q) \end{cases}$$

بين أن f مستمرة في النقطة $\frac{1}{2}$،وليست مستمرة في أية نقطة أخرى من R .

الاستمرار المنتظم

(٥ — ١٤)

تحقق من كون الدوال $f:(X,D) \to (Y,D')$ الواردة في التمارين (٥–١) و (٥–٢) و (٥–٣) ليست مستمرة فحسب . بل ومنتظمة الاستمرار كذلك .

(٥ — ١٥)

لتكن $f:(X,D) \to (Y,D')$ دالة منتظمة الاستمرار على X . وجدنا أنه إذا كانت $\{x_n\}$, $n \in N$ متوالية أساسية (متوالية كوشي) في X . فإن $\{f(x_n)\}$, $n \in N$ لا بد أن تكون متوالية أساسية في Y (٥.٢٨) . (إن هذا يعني أن الدوال المنتظمة الاستمرار تتمتع بخاصة حفظها للمتواليات الأساسية،بغض النظر عما إذا كانت هذه المتواليات متقاربة أم لا) .

أورد مثالا تبين فيه أن الاستمرار غير المنتظم لا يحفظ المتواليات الأساسية بالضرورة . (**إرشاد** . خذ مثلا الدالة الحقيقية على الفضاء الجزئي $]0,1]$ من $\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x) = \frac{1}{x}$. ثم خذ المتوالية $\{\frac{1}{n}\}$, $n \in N$).

(٥ — ١٦) :

إذا كانت $f:(X,D) \to (Y,D')$ دالة إيزومترية . فإنها منتظمة الاستمرار على X .

(٥ — ١٧)

لتكن A مجموعة جزئية كثيفة في الفضاء المتري (X,D) . ولتكن f دالة من A إلى فضاء متري تام (Y,D') . فإذا كانت f منتظمة الاستمرار على A ، فبيّن أن ثمة دالة وحيدة مستمرة g من X إلى Y . بحيث يكون $g(a) = f(a)$ ، أيا كان a من A . (أي أنه يوجد عندئذ للدالة f ممدّد وحيد على X).

(٥ — ١٨)

ليكن (X,D) فضاء متريا . ولتكن A,B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X . تعرّف **المسافة بين المجموعتين** A,B ، على أنها عدد حقيقي نرمز له $D(A,B)$ ويعطى بالدستور

$$D(A,B) = \inf\{ D(a,b) : a \in A , b \in B\}$$

وإذا كانت A حاوية على عنصر وحيد a ، فإننا نرمز للمسافة بين B و {a} بـ $D(a,B)$ بدلا من $D(\{a\},B)$. ونطلق على $D(a,B)$ اسم **المسافة بين النقطة** a والمجموعة B ، أي أن

$$D(a,B) = \inf\{\ D(a,b) : b \in B\}$$

برهن أن الدالة $f : X \to R$ المحددة بالدستور $f(x) = D(x,A)$ ، منتظمة الاستمرار على X .

(٥ — ١٩)

برهن على أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f : (X,D) \to (Y,D')$ منتظمة الاستمرار على X هو التالي : إذا كانت A,B أي مجموعتين جزئيتين من X ، وكانت المسافة بينهما $D(A,B)$ مساوية للصفر (التمرين السابق) . فإن

$$D'(\ f(A),f(B)\ ) = 0$$

(٥ — ٢٠)

ليكن (X,D) فضاء متريا، ولنعرف دالة حقيقية $D' : X \times X \to \mathbb{R}$ بالدستور

$$D'((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = D(x_1,y_1) + D(x_2,y_2)$$

عندئذ :

(أ) إن D' تشكل متركاً على $X \times X$

(ب) إن الدالة الحقيقية D' منتظمة الاستمرار على $X \times X$.

الدوال المستمرة والفضاءات الجزئية

(٥ — ٢١)

أورد مثالا لدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ليست مستمرة في النقطة 0 ، في حين يكون مقصورها على $[0,1]$ مستمرا .

(٥ — ٢٢)

ليكن (X,D) فضاء متريا . و (Y,D_Y) فضاء جزئيا من (X,D) . لنعرف دالة $i : (Y,D_Y) \to (X,D)$ بالدستور $i(x) = x$. برهن استمرار الدالة i .

(٥ — ٢٣)

ليكن (X,D) ، و (Y,D') فضاءين متريين . و A,B مجموعتين جزئيتين من X . لنفترض أن الدالتين

$f:(A,D_A)\to(Y,D')$ و $g:(B,D_B)\to(Y,D')$ مستمرتان ، وأن $f(x)=g(x)$ أيا كان x من $A\cap B$. لنأخذ الدالة $h:A\cup B\to Y$ المحددة بالدستور :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x\in A \text{ عندما}) \\ g(x) & (x\in B \text{ عندما}) \end{cases}$$

(أ) ناقش استمرار الدالة h .

(ب) أورد مثالا تبين فيه أن h ليست بالضرورة مستمرة .

(جـ) تقدم بفرضية إضافية تجعل من h دالة مستمرة .





الفصل السادس

الدوال الحقيقية المستمرة على فضاء متري

Continuous Real Functions on a Metric Space

عرّفنا في الفصل الخامس الدوال المستمرة من فضاء متري (X,D) الى آخر (Y,D') . ولما كانت الدالة الحقيقية هي دالة من الفضاء المتري (X,D) إلى الفضاء المتري $\mathbb{R}$،فإن كل التعاريف والنظريات الواردة في الفصل الخامس . تسري بالطبع على الدوال الحقيقية المستمرة على فضاء متري (X,D) . بيد أن هذه الدوال تتمتع بصفات خاصة بها . وهدفنا في هذا الفصل دراسة أهم تلك الخواص . التي تشغل مركزاً ممتازاً في علم الحساب التفاضلي والتكاملي . ذلك أن من الدعائم الأساسية التي يرتكز عليها هذا العلم، أربع نظريات تتعلق بالدوال الحقيقية المستمرة :نظرية القيمة المتوسطة،ونظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر،ونظرية التقارب المنتظم . ونظرية الاستمرار المنتظم . فأما نظرية القيمة المتوسطة،فتستعمل في دراسة القيمة المتوسطة للمشتقات،فضلاً عن أهميتها البالغة عند تشكيل الدوال العكسية مثل $\sqrt[5]{x}$ و arc sin x . وأما نظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر . فتستخدم في إثبات نظرية القيمة الوسطى للمشتقات . تلك النظرية التي تستند إليها النظريتان الأساسيتان في علم الحساب التفاضلي والتكاملي . ومن أهم النتائج التي تترتب على نظرية التقارب المنتظم . توفير الشروط الكافية لإمكان المبادلة بين رمزي النهاية . أو بين عمليتي المكاملة والانتقال إلى النهاية . أو بين عمليتي المفاضلة والانتقال إلى النهاية . وأخيراً . فمن بين النتائج الناشئة عن نظرية الاستمرار المنتظم . تلك النظرية الهامة،التي تنص على أن كل دالة مستمرة . لا بد وأن تكون قابلة للمكاملة .

إن هدفنا في هذا الفصل هو دراسة هذه النظريات الأربع،واستخلاص بعض النتائج الهامة المترتبة عليها . وبالطبع، فلن نعرض في هذا الفصل إلى تطبيقات هذه النظريات في علم الحساب التفاضلي والتكاملي . مرجئين ذلك إلى حين بحثنا لموضوعي المفاضلة والمكاملة في الفصلين السابع والثامن .

وقبل الشروع بدراسة هذه النظريات . سنورد النظرية التالية الشائعة الاستعمال والمتعلقة بمجموع وحاصل ضرب وحاصل قسمة دالتين حقيقيتين (٤.٢٧) .

٦،٠١ — نظرية

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين مستمرتين على الفضاء المتري (X,D) . فإن كلا من $f+g$ و fg دالة مستمرة على هذا الفضاء . واذا كان $g(x) \neq 0$ أيا كان x من X . فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة كذلك على (X,D) .

البرهان

(١) لنفترض أولاً أن النقطة x_o من X حدية للساحة المشتركة X للدالتين f,g . لما كانت كل من f,g مستمرة . فإن كلا منهما مستمرة في x_o . وبالتالي . نجد استناداً إلى (٥.١٣) أن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_o) \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_o)$$

وبالرجوع إلى النظرية (٤.٢٨) نجد

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = f(x_0)\, g(x_0) = (fg)(x_0)$$

واذا لاحظنا أن $g(x) \neq 0$ أيا كان x من X . فإن

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

وهذا يعني استناداً إلى (٥.١٤) أن الدوال $f+g$. و fg و $\frac{f}{g}$ مستمرة جميعاً في x_o

(٢) أما إذا افترضنا أن x_o ليست نقطة حدية لـ X ، فإننا نجد ثانية استمرار هذه الدوال الثلاث . ذلك أن أي نقطة x_o من ساحة دالة ليست حدية لهذه الساحة ، هي بالضرورة نقطة استمرار للدالة (راجع الملاحظات التي أوردناها مباشرة بعد برهان النظرية (٥،١٤)) .

وهكذا نرى أن الدوال $\frac{f}{g}$, fg , $f+g$ مستمرة في النقطة x_o الاختيارية من الساحة X . لذا فالنظرية صحيحة . ■

٦,١ — نظرية القيمة المتوسطة

Intermediate Value Theorem

وجدنا في (٥,١٩٦) أنه إذا كانت f دالة مستمرة من الفضاء المتصل (X,D) إلى الفضاء (Y,D') فإن $f(X)$ مجموعة جزئية متصلة في (Y,D') . نستنتج في هذا النظرية التاليه.

٦,١١ — تمهيد

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على الفضاء المتري المتصل (X,D) . وكانت x_1 , x_2 نقطتين من X . وكان η عدداً حقيقياً محصوراً بين $f(x_1),f(x_2)$ ، فهنالك عنصر ξ من X . بحيث يكون $f(\xi) = \eta$.

البرهان

لما كانت $f(X)$ مجموعة جزئية متصلة من $\mathbb{R}$. كما تبين النظرية (٥,١٩٦) . وكانت كل مجموعة جزئية متصلة في $\mathbb{R}$ مجالا (٣,٧٥) . فإن $f(X)$ مجال . ولما كانت x_1,x_2 نقطتين من X . فإن $f(x_2)$ ، $f(x_1)$ تنتميان إلى هذا المجال . وبالتالي فإن η نقطة من المجال كذلك . وهذا يعني أن η نقطة من $f(X)$. لذا . فثمة نقطة (واحدة على الأقل) ξ . بحيث $f(\xi) = \eta$. ■

سننتقل الآن إلى دراسة هذه النظرية . وما يترتب عليها من نتائج . وذلك في حالة الدوال الحقيقية لمتغير حقيقي .

٦,١٢ — نظرية (القيمة المتوسطة)

ليكن I مجالا في $\mathbb{R}$ و f دالة حقيقية مستمرة ساحتها I . فإذا كانت x_1,x_2 نقطتين من I . وكان η عدداً حقيقياً محصوراً بين $f(x_2)$ ، $f(x_1)$. فهنالك عدد حقيقي ξ محصور بين x_1 , x_2 . بحيث $f(\xi) = \eta$.

البرهان

لنفترض مثلاً أن $x_1 < x_2$. عندئذ يكون $[x_1,x_2]$ مجالا ، أي مجموعة متصلة (٣,٧٥) . إذا رمزنا بـ g لمقصور f على $[x_1,x_2]$ ، فإن g دالة مستمرة (٥,٣٣) . عندئذ ، تبين النظرية السابقة (٦,١١) ، أنه إذا كان η عددا حقيقياً محصوراً بين $g(x_2)$ و $g(x_1)$ ، فهنالك عنصر ξ من $[x_1,x_2]$ ، بحيث $g(\xi) = \eta$. وإذا لاحظنا أنْ لا فرق بين $g(\xi)$ و $g(x_2)$ و $g(x_1)$ وبين $f(\xi)$ و $f(x_2)$ و $f(x_1)$ على الترتيب (لأن g مقصور f على $[x_1 , x_2]$)، فإننا نتيقن من صحة نظريتنا . ■

٦,١٣ — نتيجة

إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية مستمرة ، وكان $f(a) < 0 < f(b)$ ، فثمة عدد ξ محصور بين a,b ، بحيث $f(\xi) = 0$. يترتب على هذا ، وعلى تعريف النقطة الثابتة ، التي عرفناها في (٣,٥٩٣) ما يلي

٦,١٤ — نتيجة

إذا كانت $f : [a,b] \to [a,b]$ دالة حقيقية مستمرة ، فلها نقطة ثابتة .

البرهان

لنأخذ الدالة $\varphi(x) = f(x)-x$. فإذا كان العدد $\varphi(a)$ ، أو العدد $\varphi(b)$ مساوياً للصفر ، أي إذا كان $f(a) = a$ أو $f(b) = b$ ، فإن a أو b نقطة ثابتة لـ f . لنفترض أن $\varphi(a) \neq 0$ و $\varphi(b) \neq 0$. لما كان $f(a) > a$ ، و $f(b) < b$ ، فإننا نستنتج عندئذ أن $\varphi(a) > 0$ و $\varphi(b) < 0$. وبما أن $\varphi(x)$ مستمرة على $[a,b]$ ، فإننا نجد استناداً إلى (٦,١٣) ، أن ثمة عددا ξ محصوراً بين b و a ، بحيث $\varphi(\xi) = 0$ ، اي $f(\xi) = \xi$ ، الأمر الذي يعني أن ξ نقطة ثابتة للدالة f . ■

٦,١٥ — مثال

من المؤكد ، وجود جذر ξ للمعادلة $\cos x = x$ بحيث $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ ، ذلك أن $\cos$ دالة حقيقية مستمرة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ مداها $[0,1]$ ، وهذا المدى محتوى في $[0,\frac{\pi}{2}]$.

٦,٢ — نظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر

Maximum and Minimum Value Theorem

إذا أمعنّا النظر في نظرية القيمة المتوسطة ، نرى أنها تُشتق من خاصة اتصال المجال I ،ساحة تعريف الدالة الحقيقية f . أما نظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر ، التي سنكرس لها البند الحالي ، فتستند الى خاصة كون المجال المغلق والمحدود [a,b] متراصا .

٦,٢١ — تعاريف

نقول عن دالة حقيقية f على فضاء متري (X,D) . إنها **محدودة من الأعلى** . إذا كان مداها f(X) محدوداً من الأعلى ، ونقول عن f **إنها محدودة من الأدنى** ، إذا كان مداها f(X) محدوداً من الأدنى . واذا كانت f محدودة من الأعلى ومن الأدنى ، قلنا إنها **محدودة** . وعندما ، تكون الدالة f غير خالية ومحدودة من الأعلى ، فإن مسلمة التمام (٢,٥١) تؤكد أن لـ f(X) حداً أعلى sup f(X) ، ويدعى هذا الحد الأعلى **الحد الأعلى لـ f** ، ويرمز له بـ sup f ، أو بـ $\sup_{x\in X} f(x)$.ويعرف **الحد الأدنى لـ f** ، الذي نرمز له بـ inf f ، أو $\inf_{x\in X} f(x)$ ، بصورة مماثلة .

وتجدر بنا ملاحظة أن sup f (في حال وجوده) ، هو عدد مثبت مستقل عن x . كذلك ، فقد يكون sup f قيمة لـ f وقد لا يكون ، بمعنى أنه قد نجد نقطة x_o من X ، بحيث يكون $f(x_o) = \sup f$ ، وقد لا تكون هذه النقطة موجودة . وفي الحالة الأولى ، نقول إن sup f هو **القيمة الأكبر للدالة f** ، أو نقول إن f **تدرك حدها الأعلى** . أما في الحالة الثانية ، فنقول إن القيمة الأكبر للدالة f غير موجودة ، أو إن f لا تدرك حدها الأعلى .

ونجد ملاحظات مماثلة فيما يتعلق بـ inf f.

٦,٢٢ — أمثلة

(١) لنأخذ الدالة الحقيقية f ، التي ساحتها $\mathbb{R}$ والمحددة بالدستور $f(x)=x^2$. إن هذه الدالة محدودة من الأدنى ، كما أن $\inf f=0$ ، ذلك أن $f(R) = \{x\in R : x \geqslant 0\}$ ، ومن الواضح هنا أن f(R) محدودة من الأدنى ، وأن $\inf f(R)=0$. إن 0 في هذه الحالة هو القيمة الأصغر للدالة f ، ذلك أن $f(0)=0=\inf f$ ، وبعبارة أخرى ، فإن f تدرك في هذه الحالة حدها الأدنى .

أما إذا استعضنا عن الدالة هذه بالدالة المحددة بالدستور $f(x)=-x^2$ فإننا نجد دالة محدودة من الأعلى ، قيمتها الأكبر هي 0 ، أي أن f تدرك في هذه الحالة حدها الأعلى .

(٢) لنأخذ الدالة الحقيقية $f:]0,\frac{\pi}{2}] \to R$ والمحددة بالدستور $f(x) = \sin x$. إن هذه الدالة محدودة من الأدنى ومن الأعلى ، كما أن $\sup f = 1$ و $\inf f = 0$ ، ذلك أن $f(]0,\frac{\pi}{2}]) =]0,1]$. إن القيمة الأكبر لـ f موجودة وتساوي 1 ، ذلك أن $f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \sup f$ ، (أي أن f تدرك حدها الأعلى) . أما القيمة الأصغر لـ f فغير موجودة لعدم وجود عدد ينتمي إلى الساحة $]0,\frac{\pi}{2}]$ يكون خياله وفق f مساوياً لـ 0 .

٦,٢٣ — ملاحظة

من الممكن ، أن تدرك دالة حدها الأدنى أو الأعلى في أكثر من نقطة واحدة من الساحة . وعلى سبيل المثال ، فإن الدالة $f(x) = \cos x$ التي ساحتها R ، تدرك حدها الأعلى في عدد غير منته من النقاط $2k\pi$ ، كما تدرك حدها الأدنى في عدد غير منته من النقاط أيضاً هي $(2k+1)\pi$ ، حيث k عدد صحيح .

٦,٢٤ — نظرية

لتكن f دالة حقيقية مستمرة على فضاء متراص (X,D) . عندئذ نجد أن :

(١) الدالة f محدودة ، وهذا يعني وجود عدد موجب L بحيث يكون $|f(x)| < L$ أيا كان x من X .

(٢) الدالة f تدرك كلاً من حدها الأعلى وحدها الأدنى .

البرهان

(١) لما كانت $f(X)$ مجموعة متراصة (٥,١٩٤)، وكانت كل مجموعة جزئية متراصة في فضاء متري محدودة (٣,٦٩٣) ، فإن $f(X)$ مجموعة محدودة ، أي أن f دالة محدودة . وهذا يعني استناداً إلى تعريف المجموعة المحدودة (٣,٦٩٢) ، أن ثمة كرة مفتوحة $]a-K,a+K[$ ، بحيث $f(X) \subseteq]a-K,a+K[$. وبالتالي ، فأيا كان x من X ، نجد $f(x) \in]a-K,a+K[$ ، الأمر الذي يترتب عليه أنه أيا كان x من X ، فإن $|f(x)| < L$، حيث $L = |a| + K$.

(٢) لما كانت f محدودة وغير خالية . فلها حد أعلى $\sup f$ وحد أدنى $\inf f$. ولإثبات ما نبغي علينا أن نبين بأن كلاً من $\sup f$ (أي $\sup f(X)$) و $\inf f$ (أي $\inf f(X)$) ينتمي إلى $f(X)$. ويكفي لهذا الغرض تبيان أن أي مجموعة متراصة من الأعداد الحقيقية تحوي حدها الأعلى وحدها الادنى . إن صحة هذه الدعوى أمر جلي في حالة المجموعات المنتهية . لنفترض الآن A مجموعة متراصة وغير منتهية . ولتكن $a = \sup A$. فإذا كانت $a \notin A$. فإننا نستنتج أن هنالك نقطة x في A . بحيث يكون $a-\varepsilon < x < a$

أيا كان العدد الموجب ε. إن هذا يعني أن أي كرة مفتوحة مركزها a تحوي نقاطا من A مختلفة عن a ، الأمر الذي يترتب عليه أن a نقطة حدية لـ A . ولما كانت A مغلقة (٣،٦٩٣) ، فلا بد أن يكون $a \in A$ ، وهذا يناقض افتراضنا بأن $a \notin A$. اذن لا بد أن تحوي A حدها الأعلى .

ونجد بصورة مماثلة ، أن A لا بد أن تحوي حدها الأدنى . ■

إذا عدنا إلى نظرية هاين — بوريل (٣،٦٩٤) ، التي تنص على أن كل مجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$ متراصة،فإننا نتوصل الى النتيجتين التاليتين .

٦،٢٥ — نتيجة ١

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال المغلق المحدود $[a,b]$ ، فإن f محدودة على $[a,b]$ ، أي أن ثمة عدداً موجباً L ، بحيث $|f(x)| < L$ ، أيا كان x من $[a,b]$.

٦،٢٦ — نتيجة ٢ (نظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر)

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال المغلق المحدود $[a,b]$ ، فإن f تدرك حدها الأعلى وحدها الأدنى على $[a,b]$. إن هذا يعني أن ثمة عددين ξ_1 ، ξ_2 منتميين إلى $[a,b]$ ، (ليسا بالضرورة وحيدين) ، بحيث يكون $f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$ ، أيا كان x من $[a,b]$.

٦،٢٧ — ملاحظة

يجدر بنا التنبيه إلى أنه لو استعضنا عن المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ في النتيجتين السابقتين بمجال مفتوح أو نصف مفتوح،أو بمجال مغلق غير محدود ، فلا تصح هاتان النتيجتان بالضرورة . وأكثر من ذلك ، فإذا كانت f مستمرة ومحدودة على مجال مفتوح أو نصف مفتوح،أو مجال مغلق غير محدود ، فليس ضرورياً أن تدرك f حدها الأعلى أو حدها الأدنى على هذا المجال . وعلى سبيل المثال ، فإن الدالة الحقيقية $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ ، والمعرفة بالدستور $f(x) = \frac{1}{x}$، مستمرة على $]0,1]$ ،إلا انها غير محدودة على هذا المجال . كذلك ، فإن الدالة الحقيقية $f:]0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ المعرفة بالدستور $f(x) = \cos x$ ، مستمرة ومحدودة على $]0,\frac{\pi}{2}[$ ، إلاّ أنها لا تدرك حدها الأعلى ولا حدها الأدنى على $]0,\frac{\pi}{2}[$.

يترتب على نظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر (٦،٢٣) ، وعلى كون خيال أي مجال وفق دالة حقيقية مستمرة مجالا كذلك،واحدة من أهم نظريات الدوال المستمرة ننص عليها فيما يلي .

٦،٢٨ — نظرية

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال المغلق المحدود $[a,b]$ ، فإن مدى هذه الدالة هو المجال المغلق المحدود $[i,s]$ ، حيث s ، i هما الحد الأعلى والحد الأدنى للدالة f على $[a,b]$.

٦،٣ ــ نظرية التقارب المنتظم

Uniform Convergence Theorem

عرضنا في الفصل الرابع لموضوع نهاية متوالية من الأعداد الحقيقية . أما الآن فستتناول بالبحث موضوع « نهاية متوالية من الدوال الحقيقية » . ومن الممكن أن نُعرّف ما نعني بهذا بشكلين مختلفين ، نورد أولها فيما يلي .

٦،٣١ ــ تعريف

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية على المجموعة X . لنفترض أنه ، أيا كان x من X ، فإن المتوالية $\{f_n(x)\}, n\in N$ متقاربة . عندئذ ، إذا قابلنا كل عنصر x من X بالعدد الحقيقي $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ ، فإننا نُعرّف دالة $f: X\to R$ معرفة بالدستور $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. تسمى هذه الدالة **دالة النهاية** للمتوالية $\{f_n\}, n\in N$ ، ونقول عندئذ إن المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ **تتقارب نقطياً** على X من الدالة f . لنفترض الآن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية على الفضاء المتري (X,D) ، وأن كلاً من الدوال f_n مستمر على X . **فهل** من الضروري أن تكون دالة النهاية لهذه المتوالية، بافتراض وجودها،مستمرة على X أيضاً ؟ للإجابة على هذا السؤال ، نرى إيراد المثال التالي .

٦،٣٢ ــ مثال

لنأخذ متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n\in N$ ، التي ساحة كل دالة فيها هي الفضاء $]-1,1]$ ، والمعرفة بالدستور $f_n(x) = x^n$. نستنتج بالرجوع إلى (٤،٣٣) أن متواليتنا $\{f_n\}, n\in N$ تتقارب نقطياً على $]-1,1]$ من الدالة f المحددة بالدستور

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & (x\in]-1,1[\text{ عندما}) \\ 1 & (x = 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

يدل هذا المثال ، على أن الاجابة على السؤال الذي طرحناه قبل قليل تكون بالنفي ، أي أن دالة النهاية لمتواليه من الدوال الحقيقية المستمرة ، ليست مستمرة بالضرورة . إن هذه النتيجة تغرينا بطرح سؤال آخر هو التالي : إذا كان كل حد من متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n\in N$ مستمراً على X ، **فما هو الشرط « الأقوى »** من التقارب النقطي ، الذي لا بد أن يتوفر في هذه المتوالية،كي تغدو f دالة مستمرة على X ؟

سنحاول الآن صياغة سؤالنا هذا بشكل آخر . إن طلبنا بأن يترتب على استمراركل دالة f_n على X استمرار دالة النهاية f على X ، يعني طلبنا بأنه أيا كان x_o من X فإن

$$\left[\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)\right] \Rightarrow \left[\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right]$$

وهذا يعني بدوره ، أن استمراركلٍّ من الدوال f_n في x_o يقتضي المساواة

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

وهكذا ، فإن سؤالنا عن النهاية يرقى الى السؤال التالي : أمن الممكن المبادلة بين رمزي النهاية في المساواة الأخيرة ؟

إن التساؤل العام ، عما إذا كانت تجوز المبادلة بين نهايتين، بالغ الأهمية وكثير التردد في مسائل التحليل الرياضي . وسنرى أن ما يسمى « التقارب المنتظم » مؤهل لتوفير شرط كاف لجواز هذه المبادلة .

٦,٣٣ — تعريف (التقارب المنتظم)

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية على مجموعة X . نقول عن $\{f_n\}, n\in N$. إنها **تتقارب بانتظام** على X من الدالة f، إذا قابل العدد الموجب الاختياري ε ، عدد صحيح موجبN_ε (تابع لـ ε فقط) ، بحيث أنه اذا كان n أي عدد صحيح يحقق الشرط $n \geqslant N_\varepsilon$ ، فإن $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ أيا كان x من X .
نستنتج من هذا التعريف مباشرة ما يلي .

٦,٣٤ — نتيجة (١)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n\in N$ على مجموعة X متقاربة بانتظام على X من الدالة f ، هو أن يكون $\lim_{n \to \infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} = 0$.

٦,٣٥ — نتيجة (٢)

إذا كانت متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n\in N$ على مجموعة X متقاربة بانتظام على X من الدالة f . فإن هذه المتوالية لا بد وأن تكون متقاربة نقطياً على X من الدالة f .

٦,٣٦ — مثال

لنأخذ متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n\in N$ ، التي ساحة كل دالة فيها $[0,1]$ ، والمعرفة بالدستور $f_n(x) = x+\frac{x^2}{n}$. من الواضح أن دالة النهاية هي:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2}{n}\right) = x \qquad (x\in[0,1])$$

لإثبات أن هذه المتوالية تتقارب من f بانتظام على $[0,1]$ ، نلاحظ أن

$$|f_n(x) - f(x)| = |x+\frac{x^2}{n} - x| = \frac{x^2}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

ليكن ε عدداً موجباً ما ، وليكن N_ε عددا صحيحاً بحيث $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. عندئذ نلاحظ أن

$$n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

لذا ، فإن متواليتنا متقاربة بانتظام على $[0,1]$ من f .

٦,٣٧ — مثال

لنأخذ متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n\in N$ ، التي ساحة كل منها $[0,1]$ والمحددة بالدستور:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & (0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \text{ عندما}) \\ 0 & (\frac{1}{n} < x \leqslant 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

سنبين أولا أن الدالة f التالية

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0 \text{ عندما}) \\ 0 & (0 < x \leqslant 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

هي دالة النهاية للمتوالية السابقة . في الحقيقة ، نلاحظ أنه عندما $x = 0$ ، فإن $f_n(x) = f(x) = 1$ أياكان n من N .

لنفترض الآن x عددا ما يحقق الشرط $0 < x \leqslant 1$. عندئذ نرى أنه إذا كان $n > \frac{1}{x}$ ، فإن $f_n(x) = f(x) = 0$. نستنتج من هذا ، ومن $f_n(0) = f(0) = 1$ التي سبق ووجدناها ، أنه أياكان x من $[0,1]$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

إذن فالدالة f هي حقاً دالة النهاية للمتوالية المفروضة .

سنبين الآن ، أن متواليتنا لا تتقارب بانتظام من f على $[0,1]$. في الحقيقة ، لو افترضنا جدلاً العكس ، لقابل العدد الموجب $\frac{1}{4}$ عدد صحيح موجب $N_{\frac{1}{4}}$، بحيث أنه إذا كان n أي عدد صحيح يحقق الشرط $n \geq N_{\frac{1}{4}}$ ، فإن $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{4}$ أيا كان x من $[0,1]$. بيد أننا نلاحظ أنه عندما $x = \frac{1}{2n}$ ، فإن

$$|f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})| = |(1 - n.\frac{1}{2n}) - 0| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

وبالتالي ، فلا يمكن لمتواليتنا أن تتقارب بانتظام من f على $[0,1]$.

سنورد الآن معياراً للتقارب المنتظم لمتوالية من الدوال الحقيقية ، لا يتطلب معرفة مسبقة لدالة نهاية هذه المتوالية .

٦,٣٨ — نظرية .(معيار كوشي للتقارب المنتظم)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n\in N$ على مجموعة X متقاربة بانتظام على X ، هو أن يقابل العدد الموجب الاختياري ε عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث أنه إذا كان m,n أي عددين صحيحين موجبين يحققان الشرطين $n \geq N_\varepsilon$ و $m \geq N_\varepsilon$ ، فإن المتراجحة $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ تغدو محققة أيا كان x من X .

البرهان

لنفترض أولاً أن المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ ، تتقارب بانتظام على X من الدالة f ، وليكن ε عددا موجبا ما . عندئذ يوجد عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث أنه إذا كان n أي عدد صحيح يحقق الشرط $n \geq N_\varepsilon$ ، فإن $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ أيا كان x من X . وبالتالي، فإذا كان m,n عددين صحيحين يحققان الشرطين $n \geq N_\varepsilon$ و $m \geq N_\varepsilon$، فإننا نجد أيا كان x من X أن :

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وبالعكس ، لنفترض الآن أن شرط النظرية محقق . عندها تكون متوالية الأعداد الحقيقية $\{f_n(x)\}, n\in N$ متوالية كوشي أيا كان x من X . ولما كان فضاء الأعداد الحقيقية المألوف $\mathbb{R}$ تاما ، فإن المتوالية $\{f_n(x)\}, n\in N$ متقاربة أيا كان x من X ، وبالتالي فيمكن تعريف دالة حقيقية f على X بالدستور $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. ليكن ε عدداً موجبا ما . إذن ، نستنتج فرضا ، أنه يقابل ε عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث أنه إذا كان m,n عددين صحيحين يحققان الشرطين $n \geq N_\varepsilon$ و $m \geq N_\varepsilon$ ، فإن المتراجحة $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ تغدو محققة ، أيا كان x من X . لذا ، فأيا كان x من X ، وأيا كان n الذي يحقق الشرط $n \geq N_\varepsilon$ ، نجد

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

وبالتالي ، فإن المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ متقاربة بانتظام من f على X . ■

سنبين الآن أن «الشرط الأقوى» من التقارب النقطي ، الذي يجب أن تتحلى به متوالية الدوال المستمرة $\{f_n\}, n\in N$ على مجموعة X ، كي تكون دالة نهايتها f مستمرة على X ، هو شرط انتظام التقارب هذه المتوالية من f . وقد يكون من المناسب التعبير عن هذا ، بأن الاستمرار يُحفظ عند الانتقال بانتظام من متوالية دوال مستمرة إلى دالة نهايتها .

٦،٣٩ — نظرية

إذا كانت $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية المستمرة على فضاء متري (X,D) ، وكانت هذه المتوالية متقاربة بانتظام من الدالة الحقيقية f على X ، فإن f دالة مستمرة على X .

البرهان

ليكن ε عدداً موجبا ما . يترتب على انتظام التقارب لمتواليتنا ، وجود عدد صحيح موجب M ، بحيث أنه إذا كان n أي عدد طبيعي يحقق الشرط $n \geqslant M$ ، فإن $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ أيا كان x من X . لنختر من حدود المتوالية الدالة f_M ، ولتكن ξ نقطة ما من X . لما كانت f_M مستمرة في النقطة ξ (لأن f_M مستمرة على X) ، فثمة عدد موجب δ ، بحيث يكون $|f_M(x) - f_M(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$ إذا تحققت المتراجحة $D(x,\xi) < \delta$. وهكذا ، نرى أنه إذا كان $D(x,\xi) < \delta$ ، فإن

$$|f(x) - f(\xi)| \leqslant |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(\xi)| + |f_M(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

وهذا يعني أن f مستمرة في النقطة ξ الاختيارية من X ، أي أن f مستمرة على X . ■

ليكن (X,D) فضاء مترياً متراصا ، ولنرمز بـ $C(X)$ لمجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على X . لما كانت كلٌّ من هذه الدوال محدودة (٦،٢٤) ، فإننا نستنتج أن $C(X)$ مجموعة جزئية من مجموعة كل الدوال الحقيقية المحدودة على X ، والتي رمزنا لهذا في (٣،١٦) بـ $B(X)$. فإذا رمزنا بـ ϱ لمقصور المترك المنتظم على $C(X)$ ، فإن $(C(X), \varrho)$ فضاء متري ، حيث يتحدد المترك ϱ بالدستور

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

أيا كان f,g من $C(X)$. وهدفنا الآن إثبات أن الفضاء المتري $(C(X), \varrho)$ تام .

٦،٣٩١ — نظرية

إذا كانت $C(X)$ مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة والمحدودة على مجموعة X ، وكان ϱ هو المترك المنتظم على $C(X)$ ، فإن الفضاء المتري $(C(X), \varrho)$ تام .

البرهان

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية أساسية في $C(X)$. عندئذ ، يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث يكون

$$\varrho(f_m, f_n) = \sup\{|f_m(x) - f_n(x)| : x\in X\} < \varepsilon$$

أيا كان العددان الصحيحان الموجبان اللذان يحققان الشرطين $n \geqslant N_\varepsilon$ و $m \geqslant N_\varepsilon$.نستنتج من هذا ، أنه إذا كان m,n أي عددين صحيحين يحققان $n \geqslant N_\varepsilon$ و $m \geqslant N_\varepsilon$، فإن $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ، ايا كان x من X . وبالعودة إلى النظرية (٦،٣٨) نحكم بوجود دالة حقيقية f على X، بحيث تكون المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ متقاربة بانتظام على X من f . الأمر الذي يعبّر عنه وفق (٦،٣٤) بأن

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{ |f_n(x) - f(x)| : x\in X\} = 0 \quad (\circ)$$

واعتماداً على النظرية السابقة (٦،٣٩) ، نحكم بأن f دالة مستمرة على X ، وإذن فهي تنتمي إلى $C(X)$. وإذا لاحظنا أن المساواة (٥) التي يمكن كتابتها على الشكل $\lim_{n\to\infty} \varrho(f_n, f) = 0$ ، تعني أن $\lim f_n = f$. فإننا نؤكد بأن كل متوالية أساسية في الفضاء المتري $(C(X), \varrho)$ متقاربة . إذن فالفضاء $(C(X), \varrho)$ تام . ■

لنعد الآن إلى النظرية (٦،٣٩) ، ولنطرح السؤال عما إذا كان عكسها صحيحاً.إن المثال التالي يبين أن الأمر ليس كذلك في الحالة العامة .

٦،٣٩٢ — مثال

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية المستمرة على $[0,1]$ والمحددة بالدستور $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$. يمكن التحقق أولا ، من أن دالة النهاية f لهذه المتوالية محددة بالدستور $f(x) = 0$ ، أيا كان x من $[0,1]$. وسنترك الأمر للقارىء للتحقق من صحة هذه الدعوى . إن كلا من الدوال f_n مستمرة على $[0,1]$ ، وكذلك دالة النهاية f . بيد أن متواليتنا $\{f_n\}, n\in N$ ليست متقاربة بانتظام على $[0,1]$ من f . وفي الحقيقة ، فإن

$$\sup\{ |f_n(x) - f(x)| : x\in [0,1]\} = \sup\{ |f_n(x)| : x\in[0,1]\}$$

$$\geqslant f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^{n+2}}{(n+1)^n}$$

ولما كان $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+2}}{(n+1)^n} = +\infty$ ، فإننا نستنتج أن :

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x\in [0,1]\} \neq 0$$

أي أن متواليتنا غير متقاربة بانتظام على $[0,1]$ من الدالة f .

إن هذا المثال يبين بجلاء أن عكس النظرية (٦،٣٩) غير صحيح بعامة ، إلاّ أن العكس الجزئي التالي لهذه النظرية صائب .

٦،٣٩٣ — نظرية (ديني Dini)

ليكن (X,D) فضاء متريا متراصا ولتكن $\{f_n\}$ متوالية من الدوال الحقيقية المستمرة على X لنفترض $\{f_n\}$ متقاربة نقطيا على X من دالة مستمرة f . فإذا كان $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ ، أيا كان n من N وأيا كان x من X ، فإن $\{f_n\}$ لا بد وأن تكون متقاربة بانتظام على X من f .

البرهان

لنرمز بـ $g_n(x)$ للدالة $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ أيا كان n من N . إن $g_n(x)$ دالة حقيقية مستمرة على X ، كما أنه يقابل كلّ x من X المتواليةُ $\{g_n(x)\}, n\in N$ الحقيقية المتناقصة والمتقاربة من 0، (أي أن $\{g_n\}, n\in N$ تتقارب نقطيا على X من الدالة g ، حيث $g(x)=0$ ، أيا كان x من X).إن هدفنا إذن هو تبيان ، أن $\{g_n\}, n\in N$ تتقارب على X من الدالة الصفرية g .

ليكن ε عددا موجبا ما ، ولنقابل كلّ عدد صحيح موجب n بالمجموعة $U_n = \{ x\in X : g_n(x) < \varepsilon\}$. لما كان من الواضح أن $U_n = f^{-1}(]-\infty,\varepsilon[)$ ، فإن U_n مجموعة مفتوحة في X ، أيا كان n من N . كذلك فمن الواضح أن $U_n \subseteq U_{n+1}$ أيا كان n من N ، وأن $\{U_n : n\in N\}$، تشكل تغطية مفتوحة لـ X، أي أن $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. ولما كان (X,D) فضاء متراصا ، فهنالك تغطية جزئية منتهية من التغطية $\{U_n : n\in N\}$ للمجموعة X ، أي أن هنالك عددا صحيحا موجبا p ، بحيث $X = \bigcup_{i=1}^{p} U_i = U_p$. وهكذا ، فإن كان n عددا صحيحا يحقق الشرط $n \geq p$ ، فإن $0 \leq g_n(x) \leq g_p(x) < \varepsilon$ أيا كان x من X. لذا ، نكون قد وجدنا أنه يقابل العدد الموجب الاختياري ε ، عدد صحيح موجب p. بحيث أنه إذا كان n أي عدد صحيح يحقق الشرط $n \geq p$، فإن .

$$| g_n(x) - g(x) | = | g_n(x) | = g_n(x) < \varepsilon$$

أيا كان x من X. وهذا يعني أن $\{g_n\}, n\in N$ متقاربة بانتظام على X من الدالة الصفرية g . ■

٦،٤ — نظرية الاستمرار المنتظم

Uniform Continuity Theorem

عرّفنا في الفصل الخامس الدالة المستمرة في نقطة من فضاء متري ، كما عرفنا الدالة المستمرة على فضاء متري ، بأنها الدالة المستمرة في كل نقطة من هذا الفضاء . ويقال في هذا الصدد أحيانا إن الاستمرار في نقطة ، هو « **خاصة موضعية** »،في حين أن الاستمرار هو « **خاصة شاملة** » . وفي الحالة العامة ، فإننا نقول عن خاصة متعلقة بفضاء إنها خاصة موضعية ، إذا أمكن التعبير عنها من خلال جوار ما لنقطة من هذا الفضاء . أما إذا عبرنا عن هذه الخاصة باستخدام الفضاء بأكمله ، فإننا نقول عنها إنها خاصة شاملة . ولما كنا قد رأينا في (٥،٢) ، أن الاستمرار المنتظم لدالة يتعلق بدراسة سلوك هذه الدالة على ساحتها كلها ، فإن الاستمرار المنتظم ينتمي الى الخواص الشاملة . ورغم كون الاستمرار على فضاء ، والاستمرار المنتظم على هذا الفضاء ، خاصتين شاملتين ، إلا أن هنالك فرقاً بينهما . فقد رأينا ، أن كون الدالة مستمرةً لا يقتضي بالضرورة استمرارها المنتظم . بيد ، أننا وجدنا أن لا فرق بين الاستمرار والاستمرار المنتظم على الفضاءات المترية المتراصة (٥،٢٦) . ولما كان المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ متراصا في $\mathbb{R}$ ، فإننا نستنتج النظرية التالية .

٦،٤١ — نظرية (هاين Heine)

اذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ، فلا بد أن تكون f منتظمة الاستمرار على $[a,b]$.

٦،٤٢ — مثال

لقد وجدنا في (٥،٢٢) أن الدالة الحقيقية المستمرة $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ ، والمعرفة بالدستور $f(x)=x^2$ ، منتظمة الاستمرار على $[0,1]$ ، وذلك بالتحقق المباشر استنادا إلى تعريف الاستمرار المنتظم. ولكن يمكننا الآن، أن نحكم بصحة هذه الدعوى مباشرة استنادا الى (٦،٤١) .

أما لو كانت f الدالة الحقيقية المستمرة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرفة بالدستور نفسه $f(x)=x^2$ ، فقد وجدنا في (٥،٢٣) ، أن f ليست منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$. لاحظ أن الفضاء $\mathbb{R}$ ليس متراصا . ولكن هذا لا يعني أن الدالة الحقيقية المستمرة على فضاء غير متراص لا يمكن أن تكون منتظمة الاستمرار . وعلى سبيل المثال ، فإن الدالة الحقيقية على الفضاء غير المتراص $\mathbb{R}$ ، والمعرفة بالدستور $f(x)=ax+b$ ، حيث a,b عددان حقيقيان ، هي دالة منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$. وفي الحقيقة ، ليكن ε عددا موجبا ما . عندئذ ، نلاحظ أنه يقابل ε العدد الموجب $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$ في حالة $a\neq 0$ (وأي عدد موجب δ ، إذا كان $a=0$) بحيث أنه إذا كان $|x-y|<\delta$ ، فإن $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

نستنتج من هذا المثال ، أن حاصل ضرب دالتين منتظمتي الاستمرار على $\mathbb{R}$ ، قد يكون دالة منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$ ، وقد لا يكون كذلك . فالدالتان f,g اللتان ساحة كل منهما $\mathbb{R}$ ، والمعرفتان بالدستورين $f(x) = x\ ,\ g(x) = x$ منتظمتا الاستمرار على $\mathbb{R}$، كما رأينا قبل قليل (ضع في المثال السابق $a = 1\ ,\ b = 0$) . بيد أن حاصل ضربهما وهو الدالة fg التي ساحتها $\mathbb{R}$ ، والمحددة بالدستور $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2$ ، ليست منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$ كما رأينا . أما لو كانت f,g الدالتين المنتظمتي الاستمرار على $\mathbb{R}$ ، والمحددتين بالدستورين $g(x) = x$ و $f(x) = 1$ ، فإن الدالة تغدو منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$.

إن أهمية الدوال المنتظمة الاستمرار ، تكمن في أن الدالة المنتظمة الاستمرار على مجال مغلق ومحدود يمكن أن « تُقَرَّبَ » من نمط خاص وبسيط من الدوال تدعى الدوال الدَّرَجِيَّة .

٦.٤٣ — تعريف (الدالة الدَّرَجِيَّة)

نقول عن دالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ، إنها **درجيـــــة** على $[a,b]$ ، إذا ، وجدت مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية $\{x_o = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ محتواة في $[a,b]$ ، ووجدت مجموعة أخرى من الأعداد الحقيقية $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ ، بحيث يكون $f(x) = c_k$ عندما $x_{k-1} < x < x_k$ ، أيا كان k من $\{1, 2, \ldots, n\}$.

٦.٤٤ — نظرية

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ، فإنه يقابل كلَّ عدد موجب ε دالةٌ درجية g على $[a,b]$ ، بحيث يكون $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ ، أيا كان x من $[a,b]$.

البرهان

لما كانت الدالة f مستمرةعلى $[a,b]$، فإنه يترتب على نظرية هاين (٦.٤١) ، أن f منتظمة الاستمرار على $[a,b]$. إذن يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان x,y أي عنصرين من $[a,b]$ يحققان الشرط $|x - y| < \delta$ ، فإن $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ليكن n عدداً طبيعيا يحقق المتراجحة $n > \frac{b-a}{\delta}$ ، ولنختر نقاط المجموعة $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ من $[a,b]$ ، بحيث يكون $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ أيا كان k من المجموعة $\{0, 1, \ldots, n\}$.

نلاحظ الآن ، أنه أيا كان k من $\{1, \ldots, n\}$ ، فإن $|f(x) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$ عندما $x_{k-1} < x < x_k$ ، ذلك أن $|x_k - x_{k-1}| = \frac{b-a}{n} < \delta$. وهكذا فإننا نكون قد عرّفنا دالة درجية g على $[a,b]$ محددة بالدستور

$$g(x) = \begin{cases} f(x_{k-1}) & (\text{عندما } x_{k-1} < x < x_k \text{ ، أيا كان } k \text{ من } \{1, \ldots, n-1\}) \\ f(x_{n-1}) & (\text{عندما } x_{n-1} < x < x_n) \end{cases}$$

كما أن $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ ، أيا كان x من $[a,b]$. ■

تمارين

الدوال الحقيقية المستمرة

(٦ — ١)

لتكن $f_1, f_2, \ldots, f_n$ دوال حقيقية مستمرة على فضاءٍ (X,D)، ولنعرف الدالتين f,g على X كما يلي :

$$f(x) = \sum_{r=1}^{n} f_r(x) \quad \text{و} \quad g(x) = \prod_{r=1}^{n} f_r(x)$$

برهن أن كلًّا من f,g دالة مستمرة على X

(٦ — ٢)

يعرَّف **كثير الحدود** من الدرجة n ، بأنه الدالة $P : R \to R$ المحددة بالدستور

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$. برهن أن P دالة مستمرة على R .

(٦ — ٣)

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على (X,D)، فإننا نعرف الدالة $|f|$ بأنها دالة حقيقية ساحتها X . ومحددة بالدستور $|f|(x) = |f(x)|$. برهن أن $|f|$ مستمرة على X . ثم بين أن الدعوى العكسية ليست صحيحة في الحالة العامة .

(٦ — ٤)

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين مستمرتين على (X,D)، فإننا نعرِّف $f \wedge g$ و $f \vee g$ بأنهما دالتان حقيقيتان ساحتهما X . ومحددتان بالدستورين

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad , \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

بين أن هاتين الدالتين مستمرتان على X . (أثبت أولا أنه أيا كان a,b من R ، فإن

$$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) \quad \text{، و} \quad \max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \text{) .}$$

(٦ — ٥)

بين أن النظرية (٦،٠١) تبقى صحيحة ، إذا استعضنا عن الاستمرار الوارد فيها بالاستمرار المنتظم .

(٦ — ٦)

برهن أنه ، إذا كانت f_1, f_2 دالتين حقيقيتين مستمرتين على الفضاء المتري (X,D)، فإن المجموعة $\{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$ مغلقة في (X,D). برهن أيضا أنه إذا كانت الدوال الحقيقية $f_1, f_2, \ldots, f_n$ مستمرة جميعا على (X,D)، فإن المجموعة

$$\{ x \in X : f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) \}$$

لا بد وأن تكون مغلقة في (X,D).

نظرية القيمة المتوسطة

(٧ — ٦)

بين أن كل كثير حدود من الدرجة الثالثة $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ ، لا بد وأن يكون له صفر حقيقي، أي انه يوجد عدد حقيقي ξ ، بحيث $P(\xi) = 0$. عمم هذه النتيجة على أي كثير حدود من درجة فردية . هل تبقى هذه النظرية صحيحة عندما يتعلق الأمر بكثير حدود من درجة زوجية ؟ أورد مثالا أو مثالا معاكسا تدلل به على إجابتك .

(٨ — ٦)

برهن أنه إذا كانت f دالة حقيقية على (X,D)، وكانت f مستمرة في النقطة a ، وكان $f(a) < 0$ ، فهنالك كرة مفتوحة $N(a,\varepsilon)$. بحيث يكون $f(x) < 0$ ، أيا كان x من $N(a,\varepsilon)$.

(٩ — ٦)

لتكن $f : [0,1] \to R$ دالة مستمرة ومتباينة . ولنفترض أن $f(0) < f(1)$. أثبت صحة ما يلي :

(١) إذا كان $0 < x < 1$. فإن $f(x) > f(0)$.

(٢) إذا كان $0 < x < y < 1$. فإن $f(x) < f(y)$.

(١٠ — ٦)

لتكن f دالة حقيقية مستمرة على $[0,2\pi]$. بحيث يكون $f(0) = f(2\pi)$.

برهن أن ثمة عددا c ينتمي إلى $]0,\pi[$ تتحقق معه المساواة $f(c) = f(c+\pi)$.

(**إرشاد** . شكل الدالة المساعدة g على $[0,\pi]$. والمحددة بالدستور $g(x) = f(x) - f(x+\pi)$)

(٦ — ١١)
لتكن f دالة حقيقية ساحتها [0,1] تحقق الخاصة التالية : إذا كان y عددا حقيقيا ما . فإما أنْ لا يوجد عدد x من [0,1] يحقق المساواة f(x)=y . وإما أنْ يوجد عددان على الضبط x من [0,1] . يحققان المساواة f(x)=y . بين أن f لا يمكن أن تكون مستمرة على [0,1] .

نظرية التقارب المنتظم

(٦ — ١٢)
لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية على $\mathbb{R}$. والمعرفة بالدستور $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$. برهن أن هذه المتوالية تتقارب نقطيا على $\mathbb{R}$ من دالة النهاية f المحددة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (|x|<1 \text{ عندما}) \\ \frac{1}{2} & (|x|=1 \text{ عندما}) \\ 1 & (|x|>1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

هل يمكن أن تكون متواليتنا متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ من f ؟ ولماذا ؟

(٦ — ١٣)
(أ) لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية ، التي ساحة كل منها]0,1[. والمعرفة بالدستور $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$. بين أن هذه المتوالية تتقارب نقطياً ، وليس بانتظام على]0,1[.

(ب) لتكن $\{g_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية ، التي ساحة كل منها]0,1[. والمعرفة بالدستور $g_n(x) = \frac{x}{nx+1}$. بين أن هذه المتوالية تتقارب بانتظام على]0,1[من الدالة الصفرية .

(٦ — ١٤)
لتكن $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ متواليتين من الدوال الحقيقية ، تتقاربان بانتظام على مجموعة X من الدالتين f,g على الترتيب .

(أ) بين أن $\{f_n + g_n\}$ ، تتقارب بانتظام على X من f+g .

(ب) ليكن

$$h_n(x) = f_n(x) g_n(x) \quad و \quad h(x) = f(x)\, g(x)$$

أيا كان x من X . برهن أنه إذا كانت كل من الدوال f_n , g_n محدودة على X . فإن $\{h_n\}, n \in N$ تتقارب بانتظام على X من الدالة h .

(٦ — ١٥)

لتكن $\{f_n\}, n \in N$ متوالية من الدوال الحقيقية متقاربة بانتظام من f على مجموعة S من الأعداد الحقيقية . ولنفترض وجود عدد حقيقي موجب M بحيث يكون $|f_n(x)| \leq M$. أيا كان x من S . وأيا كان n من N . لنفترض كـــذلك ، أن g دالـــة مستمرة على الكرة المغلقـــة $B(0,M)$. ولنعرف الـــدوال $h(x) = (g \circ f)(x)$. $h_n(x) = (g \circ f_n)(x)$ على S . برهن أن متوالية الدوال $\{h_n\}, n \in N$ تتقارب بانتظام على S من h .

(٦ — ١٦)

لتكن $\{f_n\}, n \in N$ متوالية من الدوال الحقيقية على $\mathbb{R}$. محددة بالدستور

$$f_n(x) = \lim_{m \to \infty} (\cos n!\pi x)^{2m}$$

(أ) بين أنه في حال كون x عدداً عادياً . فإن $\lim_{m \to \infty} f_n(x) = 1$. (**إرشاد**. اذا كان $x = \frac{a}{b}$. حيث a,b عددان صحيحان ، فإن $n!x$ يغدو عددا صحيحاً أيضا عندما يكون n كبيراً بقدر كاف . وعندئذ يكون

$$((\cos n!\pi x)^{2m} = 1$$

(ب) أثبت أنه في حال كون x عدداً غير عادي ، فإن $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. (**إرشاد**. إذا لم يكن $n!x$ عدداً صحيحاً ، فإن $|\cos n!\pi x| < 1$ ، وبالتالي يكون $f_n(x) = 0$) .

(٦ — ١٧) :

لتكن $\{f_n\}, n \in N$. متوالية من الدوال الحقيقية ساحة كل منها $\mathbb{R}$. ولتكن هذه المتوالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ من الدالة الحقيقية f . لنعرِّف الدوال $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالدستور $g_n(x) = f_n(x + \frac{1}{n})$. أياً كان n من N. برهن أن المتوالية $\{g_n\}, n \in N$ تتقارب نقطياً على $\mathbb{R}$ من الدالة f .

نظرية الاستمرار المنتظم

(٦ـ١٨)

بين أن الدالتين التاليتين منتظمتا الاستمرار على ساحتيهما :

$$f:[0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x^3$$

$$f:[1,+\infty[\to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

(٦ — ١٩)

بين أن الدالتين التاليتين ليستا منتظمتي الاستمرار على ساحتيهما :

$$f:[1,+\infty[\to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x^3$$

$$f:]0,1[\to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

(٦ — ٢٠)

لتكن $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة ودورية (أي أن ثمة عددا حقيقيا a ، بحيث تتحقق المساواة $f(a+x)=f(x)$ أيا كان x من $\mathbb{R}$). أثبت أن f منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$.

(٦ — ٢١)

لتكن A مجموعة جزئية محدودة من $\mathbb{R}$ ، ولتكن $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$. برهن عندئذ أن $f(A)$ مجموعة محدودة كذلك .

(٦ — ٢٢)

نقول عن دالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، إنها خطية على $\mathbb{R}$ ، إذا تحققت المساواتان

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \quad f(kx) = kf(x)$$

أيا كان x,y من $\mathbb{R}$ ، حيث k عدد حقيقي .

(أ) برهن أن كل دالة خطية على $\mathbb{R}$ ، هي من الشكل $f(x)=ax$ ، حيث a عدد حقيقي ما .

(ب) أثبت أن f منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$.

(٦ — ٢٣)

لتكن $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ ، دالة مستمرة . برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون f منتظمة الاستمرار على $]a,b[$ ، هو أن تكون النهايتان $\lim_{x \to b-} f(x)$ ، و $\lim_{x \to a+} f(x)$ موجودتين .

(٦ — ٢٤)

برهن أنه إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين منتظمتي الاستمرار على S ، فإن $f+g$ منتظم الاستمرار على S كذلك . وإذا كانت f,g ، فضلا عن ذلك، محدودتين على S ، فإن حاصل ضربهما fg منتظم الاستمرار على S . وإذا كانت f,g ، بالإضافة الى ذلك، محدودتين بعيداً عن الصفر ، أي إذا وجد عدد موجب M ، بحيث يكون $0 < M \leqslant |g(x)|$ ، أيا كان x من S ، فإن $\frac{f}{g}$ دالة منتظمة الاستمرار على S . (**إرشاد** لحل القسم الاخير :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(y)}\right| = \frac{|f(x)\,g(y) - g(x)\,f(y)|}{|g(x)|\,|g(y)|} \leqslant$$

$$\leqslant M^{-2}\,|f(x)\,g(y) - f(y)\,g(y) + f(y)\,g(y) - g(x)\,f(y)| \leqslant$$

$$(\leqslant M^{-2}[\,|g(y)|\,|f(x) - f(y)| + |f(y)|\,|g(y) - g(x)|\,]$$

(٦ — ٢٥)

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة منتظمة الاستمرار ، ولنعرف متوالية الدوال الحقيقية $\{f_n\}, n \in N$ ، التي ساحة كل منها $\mathbb{R}$ ، والمحددة بالدستور $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ أيا كان n من N . بين أن هذه المتوالية تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ من الدالة f .



المفاضلة

Differentiation

برزت في علم الهندسة وعلم الميكانيك مسألتان شهيرتان . حول تعيين ميل المماس لمنحن في نقطة منه . وإيجاد السرعة الآنية لمتحرك في لحظة ما . وقد وُجد أن حل هاتين المسألتين . يقود إلى فكرة أساسية واحدة،أطلق عليها اسم « الاشتقاق » أو « المفاضلة » . وللدلالة على ما لمفهوم المفاضلة هذا من أهمية بالغة . يكفينا القول . بأنه كان الاساس المكين الذي قام عليه فيما بعد صرح « الحساب التفاضلي » الشاهق،الذي ما انفك يشغل مركزا مرموقا في جل فروع المعرفة الطبيعية .

إن ما نهدف اليه في فصلنا هذا . ليس دراسة تطبيقات الحساب التفاضلي في الهندسة والميكانيك . إذ ان طموحنا لن يتعدى الخواص العامة للمشتق ، واستنباط النظريات الأساسية في علم الحساب التفاضلي . ورغم أن كثيراً من النتائج والنظريات ، التي سنعرض لها ، قد تكون مألوفة لدى القارىء من خلال دراسته للرياضيات الابتدائية، في باكورة دراسته الجامعية ، إلا اننا سنركز بصورة أساسية على إيراد براهين دقيقة قدر المستطاع . تستند إلى النتائج التي توصلنا اليها في الفصول السابقة .

٧,١ — المشتق

The Derivative

٧,١١ — تعريف

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن $f: S \to \mathbb{R}$ دالة. نقول عن f إنها **قابلة للاشتقاق في النقطة** x_o ، إذا كانت x_o نقطة داخلية (*) لـ S ، وكانت النهاية

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

موجودة. تسمى هذه النهاية عندئذ **مشتق الدالة** f **في النقطة** x_o، ويرمز لها بـ $\frac{d\,f(x_o)}{dx}$ أو بـ $(Df)(x_o)$ أو بـ $f'(x_o)$.

إذا رمزنا بـ E لمجموعة النقاط الداخلية في S ، التي تكون f في كل منها قابلة للإشتقاق (**) ، فإن الدالة التي ساحتها E ، والتي خيال كل عنصر x_o من E وفقها هو $f'(x_o)$، تسمى **مشتق الدالة** f (**أو الدالة المشتقة لـ** f) ، ويرمز لها بـ $\frac{df}{dx}$ أو Df أو f' . وعندئذ نقول إن f **قابلة للاشتقاق على** E، أو إن للدالة f مشتقاً على E .

٧,١٢ — مثال

لنأخذ الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x) = |x|$. من السهل التحقق بأن $f'(x) = 1$ ، أيا كان العدد الموجب x ، وأن $f'(x) = -1$ ، أيا كان العدد السالب x . وإذا لاحظنا أن المقدار $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$ ليس له نهاية عندما $x \to 0$ ، فإننا نستنتج أنه لا يوجد للدالة f مشتق في النقطة 0 . وهكذا ، فإن f قابلة للاشتقاق على $R - \{0\}$.

سنورد الآن نظرية تبين الرابطة بين الاستمرار وقابلية الاشتقاق .

٧,١٣ — نظرية

إذا كانت S مجموعة جزئية من R ، وكانت $f: S \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_o من S ، فإن f لا بد وأن تكون مستمرة في x_o .

(*) أي إذا وجد مجال مفتوح $]a, \beta[$ بحيث يكون $x_o \in]a, \beta[\subseteq S$. (راجع ٣,٤٩١).

(**) قد تكون هذه المجموعة خالية .

البرهان

لما كانت f قابلة للاشتقاق في x_o ، فإنه يقابل العدد 1 عدد موجب δ' ، بحيث أنه إذا كان x أي عنصر من S يحقق الشرط $0<|x-x_o|<\delta'$ ، فإن

$$\left|\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}-f'(x_o)\right|<1$$

إذا ضربنا طرفي المتراجحة بـ $|x-x_o|$ ، فإننا نجد استنادا إلى متراجحة المثلث أن

$$|f(x)-f(x_o)|<(1+|f'(x_o)|)|x-x_o|$$

ليكن ε عددا موجبا ما ، ولنأخذ $\delta=\min\{\delta', \frac{\varepsilon}{1+|f'(x_o)|}\}$. عندئذ نترك للقارىء التحقق من أن $|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$ ، شريطة أن يكون x عنصراً من S يحقق المتراجحة $|x-x_o|<\delta$ ، الأمر الذي يعني استمرار f في x_o . ■

يبين المثال (٧,١٢) أن عكس هذه النظرية غير صحيح ، ذلك أن الدالة $|x|$ مستمرة في النقطة 0 ، دون أن تكون قابلة للاشتقاق في هذه النقطة . هذا ، ومن الممكن إيراد دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، دون أن تكون قابلة للاشتقاق في أي نقطة من $\mathbb{R}$.

سنورد الآن نظرية تمدنا بدساتير مشتقات مجموع وحاصل ضرب وحاصل قسمة دالتين حقيقيتين . ورغم أن هذه الدساتير لا بد وأن تكون مألوفة لدى القارىء عند دراسته لمبادىء الحساب التفاضلي ، فإن البراهين التالية ، قد تكون أدق من تلك التي تعرف عليها الطالب في دراسته السابقة .

٧,١٤ — نظرية

لتكن f,g دالتين حقيقيتين ساحتاهما المجموعتان الحقيقيتان S,T على الترتيب . فإذا كانت f,g ، قابلتين للاشتقاق في النقطة x_o ، فإن $f+g$ و fg قابلتان للاشتقاق في x_o . وإذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق في x_o، وكان $g(x_o)\neq 0$ ، فإن $\frac{1}{g}$ قابلة للاشتقاق كذلك في x_o . وفضلاً عن ذلك ، فإن

(i) $(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$

(ii) $(fg)'(x_o) = f'(x_o)\, g(x_o)+f(x_o)\, g'(x_o)$

(iii) $(\frac{1}{g})'(x_o) = -\frac{g'(x_o)}{g(x_o)^2} \qquad (g(x_o)\neq 0)$

البرهان

إن x_o هي بالفرض نقطة داخلية لكل من S,T . من السهل التحقق عندئذ بأن x_o لا بد وأن تكون نقطة داخلية (ونقطة حدية أيضاً) لـ $S \cap T$.

(١) إن الدستور (i) هو نتيجة مباشرة للمساواة

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ولحقيقة كون نهاية مجموع دالتين تساوي مجموع نهايتيهما (٤,٢٨) ومن الواضح أن اختيار x يجب أن يتم ، بحيث يكون $x \in S \cap T$.

(٢) أما الدستور (ii) فهو نتيجة مباشرة للمساواة

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ولحقيقة كون f مستمرة في x_o (٧,١٣) ، ولحقيقة كون نهايتي المجموع وحاصل الضرب تساويان مجموع وحاصل ضرب النهايتين على الترتيب .

(٣) وأخيراً ، فإن الدستور (iii) ناتج عن المساواة

$$\frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(x_0)}{x - x_0} = \frac{-1}{g(x)\,g(x_0)} \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ومن حقيقة كون الدالة g مستمرة في x_o ، ومن حقيقة كون نهاية حاصل الضرب تساوي حاصل ضرب النهايتين . لاحظ أنه لما كانت g مستمرة ، وكان $g(x_o) \neq 0$ ، فإن $g(x) \neq 0$ من أجل جميع الأعداد x التي تنتمي إلى T ، والقريبة بصورة كافية من x_o (استرشد بالتمرين (٦ — ٨)) . ■

٧,١٥ — نتيجة

يترتب على النظرية السابقة ، أنه إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين ساحتاهما المجموعتان الحقيقيتان S,T على الترتيب ، وكانت f,g قابلتين للاشتقاق في النقطة x_o ، وكان $g(x_0) \neq 0$ ، فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق في x_o، كما أن

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

من الدساتير الهامة ، التي غالبا ما تستعمل عند حساب المشتق ، دستور مشتق مركبة دالتين، التي عرفناها في (١,٣٩٨) .

(٧,١٦ — نظرية (مشتق مركبة دالتين)

لتكن f,g دالتين حقيقيتين للمتحول الحقيقي ، ساحتاهما S,T على الترتيب $(g(T) \subseteq S)$. فإذا كان المشتقان $g'(x_o)$ و $f'(g(x_0))$ موجودين ، فإن المشتق $(f \circ g)'(x_o)$ يكون موجوداً ، ويعطى بالدستور

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

البرهان

لما كانت ساحة الدالة $f \circ g$ هي $\mathring{T}$ ، وكانت x_o نقطة داخلية في T (لأن g قابلة للاشتقاق في x_o) ، فإن x_o نقطة داخلية لساحة $f \circ g$. لإثبات هذه النظرية ، من الطبيعي أن نبدأ بالمساواة التالية

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

وبما أن g قابلة للاشتقاق في x_o ، فهي مستمرة في x_o ، لذا فإن $g(x) - g(x_0) \to 0$ ، عندما $x - x_o \to 0$. وبالتالي ، فإذا جعلنا $x - x_o \to 0$ في المساواة الأخيرة ، فإننا نجد الدستور المطلوب .

إن إمعان النظر في هذه المناقشة ، يكشف عن عيب فيها ، ذلك أن $g(x) - g(x_0)$ قد يكون مساوياً للصفر في عدد غير منته من قيم x في كل جوار لـ x_o . وعندها لا يكون للعامل $\frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{g(x) - g(x_o)}$ معنى من أجل هذه القيم لـ x. لذا فلا مناص لنا من انتهاج أسلوب مختلف خال من هذا العيب ، الأمر الذي ندرجه فيما يلي :

لما كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة $g(x_0)$ ، فإنه يقابل العدد الموجب ε_1 عدد موجب δ_1 ، بحيث أنه إذا كان $y \in S$ ، و $|y - g(x_0)| < \delta_1$ ، فإن

$$|f(y) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0))(y - g(x_0))| < \varepsilon_1 |y - g(x_0)|. \qquad (\circ)$$

كذلك ، لما كانت g قابلة للاشتقاق في x_o ، فإنه يقابل العدد الموجب ε_1 ، عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كان $x \in T$ و $|x - x_o| < \delta$ ، فإن $|g(x) - g(x_0)| < \delta_1$ ، كما أن

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon_1 |x - x_0| \qquad (\circ\circ)$$

نستخلص مما سبق ، أنه إذا كان $x \in T$ و $|x-x_0|<\delta$ ، فإننا نجد استنادا إلى (*) و (**) أن

$$|f(g(x))-f(g(x_0))-f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0)|$$

$$\leqslant |f(g(x))-f(g(x_0))-f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0))|$$

$$+|f'(g(x_0))||g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0)|$$

$$\leqslant \varepsilon_1|g(x)-g(x_0)|+\varepsilon_1|f'(g(x_0))(x-x_0)| \qquad (***)$$

إذا طبقنا متراجحة المثلث على (**) فإننا نجد

$$|g(x)-g(x_0)| \leqslant (\varepsilon_1+|g'(x_0)|)|x-x_0|$$

ولو أفدنا من هذا في السطر الأخير من (***) ، فإن هذا السطر يغدو أصغر من المقدار التالي أو يساويه

$$\varepsilon_1(\varepsilon_1+|g'(x_0)|+|f'(g(x_0))|)|x-x_0|$$

لنأخذ لكل عدد موجب ε عددا ε_1 يحقق المتراجحة

$$\varepsilon_1<\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+|g'(x_0)|+|f'(g(x_0))|}\right\}$$

عندئذ نلاحظ أنه إذا كان x عنصراً من T ، يحقق المتراجحة $|x-x_0|<\delta$ ، فإن

$$|(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)-f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0)| \leqslant \varepsilon|x-x_0|.$$

فإذا كان $x \neq x_0$ ، فيمكن تقسيم طرفي هذه المتراجحة على $|x-x_0|$ ، الأمر الذي يبين أن $f\circ g$ قابلة للاشتقاق في x_0 ، وأن المشتق في هذه النقطة يعطى بالدستور الوارد في النظرية . ■

٧,٢ — خواص الدوال القابلة للإشتقاق

Properties of Differentiable Functions

سنورد في هذا البند ، أهم الخصائص للدوال القابلة للاشتقاق ، والتي نجد،بعد إمعان النظر فيها ، أنها ترتبط بمسلمة التمام . التي شكلت الأساس الذي استندنا اليه في توصلنا إلى نظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر (٦,٢٣) .

٧,٢١ — نظرية

إذا كانت f دالة ساحتها المجال المفتوح I ، وكانت f قابلة للاشتقاق في النقطة c من I ، ومدركة لحدها الأعلى أو حدها الأدنى في هذه النقطة ، فإن $f'(c)=0$.

البرهان

لنفترض مثلاً ، أن f تدرك حدها الأعلى في c . عندئذ يكون $f(x) \leq f(c)$ ، أيا كان x من I . وبالتالي . يكون $0 \geq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ عندما $c < x$ ، ويكون $0 \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ عندما $x < c$. ولما كان المشتق $f'(c)$ موجوداً فرضا . فإننا نستنتج استنادا إلى (**٤,٢٩٣**) أن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

ولما كانت النهاية الوسطى غير سالبة والنهاية اليمنى غير موجبة ، فإننا نستنتج أن $f'(c)=0$.

أما إذا كانت f مدركة لحدها الأدنى في c ، فإن النظرية تبرهن بصورة مماثلة . ■

سنستثمر هذه النظرية ، بهدف التوصل إلى واحدة من أهم خواص الدوال القابلة للاشتقاق ، والمتمثلة بالنظرية الشهيرة التالية .

٧,٢٢ — نظرية رول (Rolle)

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ ، (حيث $a < b$) ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، وكان $f(a)=f(b)$ ، فثمة عدد c منتمٍ إلى $]a,b[$ ، بحيث يكون $f'(c)=0$.

البرهان

إن دالتنا ، لا بد وأن تدرك حدها الأعلى وحدها الأدنى على $[a,b]$ء استناداً إلى نظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر (٦،٢٦) . فإذا تم إدراك الحدين الأعلى والأدنى في طرفي المجال a,b ، فإن f لا بد وأن تكون ثابتة لأن $f(a)=f(b)$ ، وبالتالي نجد أن $f'(c)=0$ أيا كان c من $]a,b[$. أما إذا بلغت f حدها الأعلى أو حدها الأدنى في نقطة c من $]a,b[$ ، فلا بد أن يكون $f'(c)=0$ وفق النظرية السابقة . ■

إن نظرية رول تشكل حالة خاصة من النظريتين التاليتين ، كما أنها ضرورية لاستنباط كل منهما .

٧،٢٣ — نظرية القيمة الوسطى في الحساب التفاضلي

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ ، (حيث $a< b$) ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، فثمة عدد c ينتمي إلى $]a,b[$ ، بحيث يكون

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

البرهان

لنشكل الدالة المساعدة $F:[a,b]\to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور :

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

لما كانت F مستمرة على $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، وكان $F(a)=F(b)=f(a)$ ، فمن الممكن تطبيق نظرية رول، التي تؤكد وجود عدد c ينتمي إلى $]a,b[$ ، بحيث يكون

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \quad . \quad ■$$

من الممكن ، التوصل الى نظرية القيمة الوسطى هذه كنتيجة للنظرية الأعم التالية .

٧،٢٤ — نظرية كوشي (Cauchy) ،في القيمة الوسطى

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين مستمرتين على المجال المغلق $[a,b]$ ، (حيث $a< b$) ، وقابلتين للاشتقاق على $]a,b[$ ، فثمة عدد c ينتمى إلى $]a,b[$ ، بحيث يكون

$$g'(c)[\, f(b)-f(a)\,]=f'(c)[\, g(b)-g(a)\,].$$

البرهان

لِنَصْطَنع الدالة

$$F(x) = [g(b)-g(a)][f(a)-f(x)] + [g(x)-g(a)][f(b)-f(a)]$$

لما كانت F مستمرة على $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، وكان $F(a)=F(b)=0$ ، فإن تطبيق نظرية رول يدل على وجود عدد c ينتمي إلى $]a,b[$ ، بحيث يكون

$$F'(c) = g'(c)[f(b)-f(a)] - f'(c)[g(b)-g(a)] = 0 \quad \blacksquare$$

إن نظرية كوشي في القيمة الوسطى (٧.٢٤) . توفر أحياناً أداة فعالة لحساب نهايات بعض الدوال .

٧,٢٥ ـــ قاعدة لوبيتال (L'Hospital) (١)

لتكن f,g دالتين قابلتين للاشتقاق على $I-\{a\}$ ، حيث I مجال و $a\in I$. فإذا كانت كل من f, g تسعى إلى 0 عندما يسعى x إلى a ، وكانت كل من $g'(x)$ و $g(x)$ مغايرة للصفر ، أياكان x من $I-\{a\}$ ، ووجدت فضلاً عن ذلك النهاية $\lim_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x)$ ، فإن النهاية $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)$ تكون موجودة ، كما أن

$$\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x)$$

البرهان

لنعرف الدالتين $f_1, g_1 : I \to \mathbb{R}$ بحيث $f_1(x) = f(x)$ و $g_1(x) = g(x)$ اياكان x من $I-\{a\}$ وبحيث $f_1(a) = g_1(a) = 0$. لما كان

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = f_1(a)$$

$$\lim_{x\to a} g_1(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 = g_1(a)$$

فإننا نستنتج استنادا الى (٥,١٤) أن f_1, g_1 مستمرتان في a ، وبالتالي مستمرتان على I ، (لانهما قابلتان للاشتقاق، وبالتالي مستمرتان على $I-\{a\}$).

وبما أنه عند دراسة سلوك نهاية دالة في a لا نعبأ بقيمة الدالة في a ، فإن سلوك نهاية $\frac{f_1}{g_1}$ في a ، هو نفس سلوك نهاية $\frac{f}{g}$ في a .

لتكن $\{a_n\}, n\in N$ متوالية مطردة ، حيث $a_n \in I-\{a\}$ ، و $a_n \to a$. عندئذ ، نجد استناداً إلى نظرية كوشي (٧,٢٤) أنه يقابل كل a_n عدد c_n محصور بين a_n و a ، بحيث يكون

$$g'_1(c_n)[\, f_1(a_n) - f_1(a)\,] = f'_1(c_n)\ [\, g_1(a_n) - g_1(a)\,]$$

ولما كان $f_1(a) = g_1(a) = 0$ ، وكانت كل من $g'(x)$ و $g(x)$ مغايرة للصفر أيا كان x من I ، فإن

$$(\frac{f}{g})(a_n) = (\frac{f'}{g'})(c_n) \qquad (*)$$

لما كانت $a_n \to a$ ، فإن $c_n \to a$. وبما أن $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x)$ موجودة ، فإنه يترتب على النظرية (٤,١٥) أن $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{f'}{g'})(c_n)$ موجودة ، وتساوي $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x)$. لكننا نرى من (*) أن

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{f'}{g'})(c_n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{f}{g})(a_n)$$

لذا ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{f}{g})(a_n)$ موجودة ، وتساوي $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x)$. واستنادا الى (٤,١٥) ثانية ، نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{f}{g})(a_n) = \lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) \,.$$

إذن

$$\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x) \,. \quad \blacksquare$$

هنالك أشكال مختلفة لقاعدة لوبيتال . ورغم أن الشكل الذي أوردناه لهذه القاعدة في (٧,٢٥) أكثرها شيوعا ، إلا أن الصيغة التالية (التي نكتفي بنصها دون البرهان عليها) كثيرة الورود والتطبيق .

٧,٢٦ — قاعدة لوبيتال (٢)

لتكن f,g دالتين قابلتين للإشتقاق على $I-\{a\}$ ، حيث I مجال و $a\in I$. فإذا كانت كلٍ من g و f تسعى إلى $\pm\infty$ عندما تسعى x إلى a ، وافترضنا أن $g'(x)\neq 0$ أيا كان x من $I-\{a\}$ ووجدت فضلا عن ذلك النهاية $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x)$ ، فإن النهاية $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)$ تكون موجودة ، كما ان

$$\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to a}(\frac{f'}{g'})(x)$$

٧,٢٧ — مثال

لنأخذ الدالة $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $h(x) = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$، ولندرس النهاية $\lim_{x\to 0} h(x)$. لنعرف الدالتين f,g على $I = [0,+\infty[$ بالدستورين

$$f(x) = 1-\cos x \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

نلاحظ أن f,g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}^+ = I-\{0\}$ ، وأن $f(0)=g(0)=0$. وأن $g'(x)$ و $g(x)$ تغايران الصفر أيا كان x من $I-\{0\}$ ، وأن

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0$$

إذن نجد استنادا إلى (٧,٢٥) ، أن $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$

٧,٢٨ — مثال

لنأخذ الدالة $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $h(x) = x\log x$ ، ولندرس النهاية $\lim_{x\to 0} h(x)$. لنعرف الدالتين f,g على $\mathbb{R}^+$ بالدستورين

$$f(x) = \log x \quad \text{، و} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

نلاحظ أن f,g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ ، وأن كلا من f,g يسعى إلى $\pm\infty$ عندما $x \to 0$ ، وأن $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$. أيا كان x من $\mathbb{R}^+$ وأن

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

اذن نجد استنادا إلى (٧,٢٦) أن $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$

رأينا كيف أمكن استثمار نظرية كوشي (٧,٢٤) ، التي تشكل تعميماً لنظرية القيمة الوسطى ، للحصول على قاعدتي لوبيتال . أما نظرية القيمة الوسطى نفسها (٧,٢٣) ، فإن من أهم النتائج المترتبة عليها النظريتان التاليتان .

٧,٢٩ — نظرية

إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال I ، ولها مشتق يساوي 0 في أية نقطة داخلية من I ، فإن f دالة ثابتة .

البرهان

لتكن a أية نقطة مثبتة في I ، ولنرمز بـ g لمقصور f على $[a,x]$ ، حيث $x \in I$ و $x>a$. عندئذ تكون g مستمرة على $[a,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ (لماذا؟) . وبالتالي ، نجد استنادا إلى نظرية القيمة الوسطى (٧,٢٣) أن ثمة عددا c من $]a,x[$ بحيث يكون

$$g(x)-g(a)=(x-a)g'(c)$$

ولما كان من السهل رؤية أن $g'(c)=f(c)=0$ ، فإن

$$f(x)-f(a)=g(x)-g(a)=0$$

ونجد نتيجة مماثلة عندما $x \in I$ و $x<a$. لذا فان $f(x)=f(a)$ أيا كان x من I ، أي أن f دالة ثابتة . ■

٧,٢٩١ — نظرية

لتكن f دالة حقيقية مستمرة على المجال I ، وقابلة للاشتقاق في أي نقطة داخلية من I . عندئذ :

(١) إذا كان $f'(x) \geqslant 0$ في أي نقطة داخلية من I ، فإن f متزايدة في I .

(٢) إذا كان $f'(x)>0$ في أي نقطة داخلية من I ، فإن f متزايدة تماما في I .

البرهان

(١) لنفترض x_1, x_2 عنصرين من I بحيث $x_1<x_2$ ، ولنرمز بـ g لمقصور f على $[x_1,x_2]$. عندئذ تكون g مستمرة على $[x_1,x_2]$ ، وقابلة للاشتقاق على $]x_1,x_2[$. وبالتالي ، نجد استناداً إلى نظرية القيمة الوسطى (٧,٢٣) ، أن ثمة عددا c من $]x_1,x_2[$ بحيث يكون

$$g(x_1)-g(x_2) = (x_1-x_2)\, g'(c)$$

ولما كان من السهل رؤية أن $g'(c) = f'(c) \geqslant 0$ ، فإن

$$f(x_1)-f(x_2) = g(x_1)-g(x_2) \leqslant 0$$

الأمر الذي يبين صحة الشق (١) من نظريتنا .

أما الشق (٢) من هذه النظرية فيبرهن بصورة مماثلة . ■

لنورد الآن النظرية التالية العميمة الفائدة ، والتي نترك إثباتها للقارىء .

٧,٢٩٢ — نظرية

ليكن I مجالا ، ولتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة ومتزايدة تماما . عندئذ :

(١) إن $f(I)$ مجال من النوع ذاته (أي أنه إذا كان المجال I مغلقا ومحدودا . فإن $f(I)$ مجال مغلق محدود .
وإذا كان I مجالا مفتوحا فان $f(I)$ مجال مفتوح ، الخ ...)

(٢) إن الدالة العكسية f^{-1} (التي بينا وجودها في (١,٣٩٩٩٢) ، مستمرة على $f(I)$

(٣) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في نقطة داخلية a من I ، وكان $f'(a) \neq 0$ ، فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة $f(a)$ (التي يجب أن تكون نقطة داخلية في $f(I)$) كما ان

$$(f^{-1})'\,(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

هذا ، ونجد نتائج مماثلة تتعلق بالدالة المتناقصة تماما .

٧,٣ — نظرية تايلور

Taylor's Theorem

٧,٣١ — تعاريف

لتكن $S \subseteq R$ ، ولنفترض الدالة $f: S \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على المجموعة E (المحتواة بالطبع في S) . فإذا كانت x_o نقطة ما من E ، فمن الطبيعي التساؤل عما إذاكانت الدالة $f': E \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق في x_o . فإذا تم ذلك ، فإننا نقول إن الدالة f **قابلة للاشتقاق مرتين** في x_o ، أو إن للدالة f **مشتقا من المرتبة الثانية** في x_o ، ونرمز لهذا المشتق بـ $\frac{d^2f(x_o)}{dx^2}$ ، أو بـ $(D^2f)(x_o)$ أو بـ $f^{(2)}(x_o)$ أو بـ $f''(x_o)$.

ويتم تعريف المشتقات من مراتب أعلى من الثانية بصورة مماثلة . وإذاكانت f **قابلة للاشتقاق** n **مرة** في النقطة x_o (أي إذاكان **للدالة** f **مشتق من المرتبة** n)، فإننا نرمز لمشتقها من المرتبة n بالشكل $\frac{d^n f(x_o)}{dx^n}$ ، أو $(D^n f)(x_o)$ أو $f^{(n)}(x_o)$.

لتكن f دالة حقيقية على المجال المفتوح I ، ولنفترض أن لهذه الدالة مشتقا مستمرا من المرتبة n على I . عندئذ ، نقول إن f تنتمي إلى **الصف** C^n على I . ومن الواضح أنه إذاكانت f تنتمي إلى الصف C^n على I ، فإنها لا بد وأن تنتمي إلى الصف C^k على I ، أياكان العدد k الذي يحقق الشرط $k < n$.

وعلى سبيل المثال ، فإن الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} & (\text{عندما } x \geq 0) \\ 0 & (\text{عندما } x < 0) \end{cases}$$

حيث n عدد طبيعي ما، تنتمي إلى الصف C^n على $\mathbb{R}$ ، ولا تنتمي إلى الصف C^{n+1} على $\mathbb{R}$.

وإذاكان للدالة f مشتقات من جميع المراتب على I ، فإننا نقول عندئذ إن f تنتمي إلى الصف C^∞ على I . ومن الواضح أنه إذاكانت f عنصراً من C^∞ ، فإن مشتقات f مستمرة جميعاً على I .

وتشغل كثيرات الحدود مركزاً متميزاً بين الدوال الحقيقية على $\mathbb{R}$. فإذا أخذنا كثير الحدود P_n على $\mathbb{R}$ المحدد بالدستور

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

حيث المعاملات $a_0, a_1, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية . فإننا نرى أن خيال أي عنصر x وفق P_n . يحسب بتكرار عمليتي الجمع والضرب (المعرفتين على الحقل $\mathbb{R}$) عددا منتهياً من المرات . أما الدوال الأعم من كثيرات الحدود . فإن حساب خيال نقطة وفقها يشكل مسألة ليست بهذه البساطة . فإذا تمكنا من إيجاد كثير حدود يشكل تقريباً للدالة قرب نقطة ما . فإنه يغدو بمقدورنا عندئذ تشكيل جدول يعطي القيم التقريبية لهذه الدالة قرب هذه النقطة .

وتوفر النظرية التالية (التي تشكل تعميما لنظرية القيمة الوسطى) حلا لهذه المسألة .

٧,٣٢ — نظرية تايلور (Taylor)

إذا كانت f دالة حقيقية قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة على المجال المفتوح I . وكان $a,b \in I$ ، فهنالك عدد c محصور بين a,b . بحيث يكون

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

البرهان

لنفترض $a < b$. ولنعرف العدد الحقيقي M بالمساواة

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

عندئذ يتم إثبات نظريتنا . إذا بينا وجود عدد c من $]a,b[$. بحيث يكون $f^{(n+1)}(c) = M$. لنأخذ من أجل هذا الدالة المساعدة g على I المحددة بالدستور :

$$g(x) = -f(b) + f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{M(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

من الواضح أن الدالة g مستمرة على $[a,b]$. وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$. وأن $g(a) = g(b) = 0$. إذن نجد اعتمادا على نظرية رول (٧.٢٢) . أن هنالك عددا c ينتمي إلى $]a,b[$. بحيث يكون $g'(c) = 0$. نلاحظ أنه أيا كان x من $]a,b[$ فإن

$$g'(x) = f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) \right] - \frac{M(b-x)^n}{n!} =$$

$$= \frac{(b-x)^n}{n!} \left[f^{(n+1)}(x) - M \right]$$

لذا نجد أن $M = f^{(n+1)}(c)$ ، وبذا يتم المطلوب . ■

يسمى كثير الحدود $p_n(x)$ على $\mathbb{R}$ التالي

$$p_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

كثير حدود تايلور من الدرجة n للدالة f في النقطة a . نلاحظ فيما يتعلق بكثير حدود تايلور هذا أن

$$p_n(a) = f(a) \;,\; p'_n(a) = f'(a) \;, \ldots ,\; p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

أي أن $f(x)$ و $p_n(x)$. ومشتقاتهما الـ n الأولى تتطابق في a . لذا . يبدو من المعقول التوقع بأن كثير حدود تايلور p_n للدالة f في النقطة a يصلح لأن يكون تقريباً جيداً للدالة f في النقاط القريبة من a . والسؤال عما إذا كان $p_n(b)$ يشكل تقريباً جيدا لـ $f(b)$ عندما تكون b قريبة من a . فإن الإجابة عنه تتم إذا عرفنا مقدار الباقي $R_{n+1}(b,a)$ الذي هو

$$R_{n+1}(b,a) = f(b) - p_n(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

ذلك أن من الواضح بأن $R_{n+1}(b,a)$ يمثل الخطأ المرتكب عند اعتبار $p_n(b)$ تقريباً لـ $f(b)$

٧,٣٣ ــ مثال

يمكننا باستعمال الحدود غير الصفرية الثلاثة الأولى من كثير حدود تايلور للدالة sin في النقطة 0 أن نبين بأن $\sin(\frac{1}{2}) \# 0.47943$ بخطأ لا يتجاوز 0.00002 . في الحقيقة،لدينا (مع ملاحظة أن الدالة sin تنتمي إلى C^{∞})

$\sin' x = \cos x$	$\sin' 0 = 1$
$\sin'' x = -\sin x$	$\sin'' 0 = 0$
$\sin^{(3)} x = -\cos x$	$\sin^{(3)} 0 = -1$
$\sin^{(4)} x = \sin x$	$\sin^{(4)} 0 = 0$
$\sin^{(5)} x = \cos x$	$\sin^{(5)} 0 = 1$
$\sin^{(6)} x = -\sin x$	$\sin^{(6)} 0 = 0$

لذا فإن

$$p_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

وبالتالي يكون

$$p_6(\tfrac{1}{2}) = 0.47943$$

أما الباقي فهو

$$R_7(\tfrac{1}{2},0) = \frac{(\frac{1}{2})^7}{7!}(-\cos c) \quad , \quad c \in]0,\tfrac{1}{2}[$$

الأمر الذي يترتب عليه أن

$$\left| R_7(\tfrac{1}{2},0) \right| < \frac{(\frac{1}{2})^7}{7!} < 0.00002$$

٧,٤ ـ التقارب المنتظم والمفاضلة

Uniform Convergence and Differentiation

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية على المجال المفتوح I . ولنفترض أن دالة النهاية لهذه المتوالية هي الدالة f على I (أي أن f تتقارب نقطيا على I من الدالة f) . لقد وجدنا في (٦.٣٩) أنه إذا كانت كلٌ من الدوال f_n مستمرة على I . وكانت متواليتنا متقاربة بانتظام من الدالة f على I . فإن f دالة مستمرة على I . إن هذه النتيجة تهيب بنا لطرح السؤال التالي : إذا كانت متواليتنا متقاربة بانتظام من الدالة f على I . وكانت كل من الدوال f_n . قابلة للاشتقاق على I . أيا كان العدد الطبيعي n . فهل من الضروري أن تكون دالة النهاية f قابلة للاشتقاق على I . سنورد أمثلة تبين أن الإجابة عن هذا السؤال تكون بالنفي . وفضلا عن ذلك . فسنرى أنْ ليس من الضروري تقارب المتوالية $\{f'_n\}, n\in N$ من f' . بل ليس من الضروري أن تكون هذه المتوالية متقاربة على الإطلاق،كما يبين المثال التالي .

٧,٤١ — مثال

لنأخذ المتوالية $\{f_n\}, n\in N$. حيث f_n دالة حقيقية ساحتها $I=R$. ومحددة بالدستور $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$. لما كان $|\frac{\sin nx}{n}| < \frac{1}{n} \to 0$. فإن متواليتنا تتقارب بانتظام من الدالة الحقيقية f على R المحددة بالدستور $f(x)=0$.
ولما كان $f'_n(x) = \cos nx$. فإن f_n قابلة للاشتقاق على R . أيا كان n . وإذا لاحظنا أن $\lim_{n\to\infty} f'_n(\pi)$ غير موجودة .
فإننا نرى أن المتوالية $\{f'_n\}, n\in N$ ليست متقاربة على الإطلاق،رغم التقارب المنتظم للمتوالية $\{f_n\}, n\in N$ من f .

إن هذا المثال والتعليق السابق له يمكناننا من القول،بأنه إذا كانت $\{f_n\}, n\in N$ متقاربة بانتظام من f على I . وكانت كل من الدوال f_n قابلة للاشتقاق على I . وكانت x_0 نقطة ما من I . فليس من الضروري أن تتحقق المساواة

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x_0)$$

وترد في هذا الصدد النظرية التالية .

٧,٤٢ — نظرية

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية القابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ ، ولنفترض أن ثمة نقطة x_o من $]a,b[$ ، تكون من أجلها المتوالية العددية $\{f_n(x_o)\}, n\in N$ متقاربة . لنفترض كذلك وجود دالة g، بحيث تتقارب المتوالية $\{f'_n\}, n\in N$ من g بانتظام على $]a,b[$. عندئذ :

(١) هنالك دالة f تتقارب منها المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ بانتظام على $]a,b[$

(٢) إن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و $f' = g$.

البرهان

(١) لما كانت $\{f_n(x_o)\}$ متقاربة فرضا ، فإنه يترتب على (٣.٥٦) أنه يقابل العدد الموجب ε ، عدد صحيح موجب N'_ε ، بحيث أنه إذا كان m,n عددين صحيحين موجبين يحققان الشرطين $n \geqslant N'_\varepsilon$ و $m \geqslant N'_\varepsilon$ ، فإن $|f_m(x_o) - f_n(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$. كذلك ، لما كانت المتوالية $\{f'_n\}, n\in N$ متقاربة بانتظام على $]a,b[$ ، فإنه يقابل ε عدد صحيح موجب N''_ε ، بحيث أنه إذا كان m,n عددين صحيحين موجبين يحققان الشرطين $n \geqslant N''_\varepsilon$ و $m \geqslant N''_\varepsilon$ ، فإن

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (*)$$

أيا كان x من $]a,b[$. سنرمز بـ N_ε لـ $\max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$. ليكن x,y عنصرين من $]a,b[$. وليكن m,n عددين صحيحين موجبين يحققان الشرطين $n \geqslant N_\varepsilon$ و $m \geqslant N_\varepsilon$. عندئذ ، نرى استناداً إلى نظرية القيمة الوسطى (٧.٢٣) ، أن ثمة عددا t محصوراً بين x,y ، بحيث يكون

$$f_m(x) - f_n(x) - f_m(y) + f_n(y) = (x-y)\left[f'_m(t) - f'(t) \right]$$

وبالتالي ، نجد أن

$$| f_m(x) - f_n(x) - f_m(y) + f_n(y) | \leqslant |x-y| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

ويترتب على هذه المتراجحة أن

$$| f_m(x) - f_n(x) | \leqslant | f_m(x) - f_n(x) - f_m(x_0) + f_n(x_0) | + | f_m(x_0) - f_n(x_0) | <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

نستنتج من هذا أن المتوالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على $]a,b[$ من دالة f . وبذا يتم إثبات الشق الأول من النظرية .

(٢) ليكن c عنصراً من $]a,b[$ ، ولنعرف المتوالية $\{\varphi_n\}, n\in N$ ، والدالة ψ على $]a,b[$ كما يلي :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} & (\text{عندما } x \neq c) \\ f'_n(c) & (\text{عندما } x = c) \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

وبما أن $\lim_{x\to c} \varphi_n(x) = f'_n(c) = \varphi_n(c)$ ، فإن φ_n مستمرة في c . وبالتالي فان الدوال φ_n جميعاً مستمرة على $]a,b[$.

نلاحظ كذلك أنه إذا كان $n \geq N_\varepsilon$ و $m \geq N_\varepsilon$ ، فإننا نجد أيا كان x من $]a,b[-\{c\}$ أن

$$|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = \frac{1}{|x-c|} |f_m(x) - f_n(x) - f_m(c) + f_n(c)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (\text{استناداً إلى } (**))$$

كما أن

$$|\varphi_m(c) - \varphi_n(c)| = |f'_m(c) - f'_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (\text{استناداً إلى } (*))$$

إذن نجد أن $\{\varphi_n\}, n\in N$ ، متقاربة بانتظام على $]a,b[$. ولما كان التقارب المنتظم يحفظ الاستمرار (٧،١٣) . فإن ψ مستمرة على $]a,b[$ ، وهذا يعني أن

$$\lim_{x\to c} \psi(x) = \psi(c) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(c) = \lim_{n\to\infty} f'_n(c) = g(c)$$

فإذا أضفنا إلى هذا أنه عندما $x \neq c$ يكون

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} = \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$$

فإننا نستنتج أن $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجودة ، وتساوي $g(c)$. إذن نجد أن f قابلة للاشتقاق في النقطة c ، وأن $f'(c) = g(c)$. ولما كان هذا صحيحاً أيا كان c من $]a,b[$ ، فإن $f' = g$ على $]a,b[$ ، وبذا نكون قد أنجزنا إثبات كامل الشق الثاني من النظرية . ■

٧،٤٣ — ملاحظة

تجدر بنا الإشارة إلى أن النظرية (٧،٤٢) توفر الشروط الكافية لتقارب المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ بانتظام، دون أن تكون هذه الشروط لازمة . فالمثال الذي أوردناه في (٧،٤١)، يقدم متوالية $\{f_n\}, n\in N$ متقاربة بانتظام من دالة f ، دون أن تكون المتوالية $\{f'_n\}, n\in N$ متقاربة بانتظام، بل دون أن تكون المتوالية $\{f'_n\}, n\in N$ متقاربة أبداً .

٧,٥ — الدوال الابتدائية

Elementary Functions

أوردنا في سياق بحوثنا السابقة الدوال المثلثاتية كأمثلة تهدف إلى إيضاح بعض النظريات ، رغم أننا لم نعرّفها ، ولم نَسْتَبِنْ خواصها . وسنحاول الآن معالجة الدوال الابتدائية الرئيسية في التحليل الرياضي . وهي الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثاتية والزائدية ، استناداً إلى نتائج البنود السابقة من هذا الفصل . ورغم أن تعريف هذه الدوال يمكن أن يتم بأشكال عدة ، الا أننا اخترنا تقديمها بالاستعانة بالمعادلات التفاضلية . ومن الممكن تعريف **المعادلة التفاضلية** بأنها دالة $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ محددة بالدستور

$$\varphi \left(f^{(n)}(x) , f^{(n-1)}(x) , \ldots , f'(x) , f(x) \right) = 0$$

وعلى سبيل المثال ، فإذا كان $n = 2$ ، وكانت الدالة $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ محددة بالدستور $\varphi(x,y,z) = x + z$ ، فإن المعادلة التفاضلية في هذه الحالة تغدو $f''(x) + f(x) = 0$، التي تكتب عادة على الشكل $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. واذا كان $n = 1$، وكانت الدالة $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ محددة بالدستور $\varphi(x,y) = x - y$، فإن المعادلة التفاضلية هنا هي $f'(x) - f(x) = 0$ ، التي تكتب عادة بالشكل $\frac{dy}{dx} - y = 0$.

لنأخذ المعادلة التفاضلية الأخيرة $\frac{dy}{dx} = y$. نقول عن الدالة $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ إنها **حل** للمعادلة $\frac{dy}{dx} = y$ ، إذا كانت Φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، وتحقق المعادلة $\Phi'(x) = \Phi(x)$ أيا كان x من $\mathbb{R}$. ونعرّف بصورة مماثلة حل المعادلة التفاضلية العامة . إن موضوع **وجود** حلول معادلة تفاضلية معينة أمر يدرس بالتفصيل في مقرر المعادلات التفاضلية ، ولن نتطرق إليه في هذه العجالة . وفيما يتعلق بالمعادلات التفاضلية التي سنوردها في بندنا هذا ، فإنه يبرهن على وجود حلول غير صفرية لها ، الأمر الذي يمكن التحقق منه بالرجوع إلى أي كتاب في نظرية المعادلات التفاضلية .

٧,٥١ — تعريف (الدالة الأسية)

نعرّف الدالة الأسية ، بأنها ذلك الحل $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad (٥)$$

الذي يحقق الشرط $\Phi(0) = 1$.

سنبين الآن أن حل هذه المعادلة (الموجود !) ، والذي يحقق الشرط $\Phi(0) = 1$ وحيد . لنفترض أن Φ, Ψ حلان للمعادلة (*) يحققان الشرط الوارد في التعريف ، وليكن $\chi = \Phi - \Psi$. عندئذ تكون الدالة χ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وتحقق المعادلة $\chi'(x) = \chi(x)$ ، أياكان x من $\mathbb{R}$ ، كما يكون $\chi(0) = 0$. سنبين الآن أن $\chi(x) = 0$ أياكان x من $\mathbb{R}$. إن هذه الحقيقة تشكل حالة خاصة من النظرية التالية .

٧,٥٢ — نظرية

لتكن χ دالة حقيقية ساحتها $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. وتحقق المعادلة التفاضلية $\chi'(x) = \chi(x)$ ، أيا كان x من $\mathbb{R}$. فإذا كان $\chi(c) = 0$ ، من أجل نقطة ما c ، فإن $\chi(x) = 0$ ، أياكان x من $\mathbb{R}$

البرهان

لنفترض مؤقتاً أن ثمة نقطة d ، بحيث $\chi(d) \neq 0$. ولنرمز بـ f للدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x) = \chi(x)\chi(2d - x)$. إن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، كما أن

$$f'(x) = -\chi(x)\chi'(2d - x) + \chi'(x)\chi(2d - x) = 0$$

لذا ، فإن الدالة ثابتة ، الأمر الذي يترتب عليه أن $f(x) = f(d) = (\chi(d))^2 \neq 0$ ، وبوجه خاص، نجد أن أنه عندما $x = c$ فيكون $\chi(c)\chi(2d - c) \neq 0$ ، وهذا يناقض افتراضنا بأن $\chi(c) = 0$. لذا ، فإن $\chi(x) = 0$ ، أياكان x من $\mathbb{R}$. ■

نستنتج من (٧.٥٢) أن المعادلة (*) تعين دالة أسية وحيدة ، سنرمز لها بـ **exp** ، كما سنرمز لقيمة هذه الدالة في النقطة x بالشكل $\exp(x)$ ، أو بـ $\exp x$.

يترتب مباشرة على تعريف الدالة الأسية بالمعادلة التفاضلية (*) أن $\exp$ قابلة للاشتقاق من جميع المراتب على $\mathbb{R}$ ، أي أنها تنتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$ (**٧.٣١**) ، وأن $\frac{d^n}{dx^n}(\exp x) = \exp x$ أياكان x من $\mathbb{R}$ ، وأياكان العدد الطبيعي n .

٧,٥٣ — نظرية

أياكان x_1, x_2 من $\mathbb{R}$ ، فإن

$$\exp(x_1)\exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)$$

البرهان

لنأخذ الدالة $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$\chi(x_1) = \exp(x_1)\exp(x_2) - \exp(x_1 + x_2)$$

بافتراض x_2 عددا حقيقيا مثبتا ما . من الواضح أن χ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وأن

$$\chi'(x_1) = \exp'(x_1)\exp(x_2) - \exp'(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2) - \exp(x_1 + x_2) = \chi(x_1)$$

فإذا أضفنا إلى ذلك أن $\chi(0) = 0$. فإننا نجد اعتمادا على (٧.٥٢) أن $\chi(x_1) = 0$ ، أيا كان x_1 من $\mathbb{R}$. ولما كان x_2 عددا حقيقياً اختيارياً . فإننا نستنتج صحة نظريتنا . ■

٧,٥٤ — نتيجة

يترتب على النظرية (٧.٥٣) ما يلي :

(١) ايا كان العدد الحقيقي x ، فإن

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$$

(٢) أيا كانت الأعداد الحقيقية $x_1, \ldots, x_n$ ، فإننا نجد (باستخدام الاستقراء الرياضي) أن

$$\exp(x_1)\ldots\exp(x_n) = \exp(x_1 + \ldots + x_n)$$

ونجد بوجه خاص ، أنه إذا كان x عدداً حقيقياً ، و n عددا طبيعيا ما ، فإن

$$(\exp x)^n = \exp(nx)$$

٧,٥٥ — نظرية

(١) أيا كان x من $\mathbb{R}$ ، فإن $\exp x > 0$.

(٢) الدالة $\exp$ متزايدة تماماً في $\mathbb{R}$.

(٣) أيا كان x من $\mathbb{R}$ ، فإن $\exp x \geq 1 + x$ ، والشرط اللازم والكافي كي **تحل** مساواة = (**محل** $\geq$) هو أن يكون $x = 0$.

(٤) إن مدى الدالة $\exp$ هو $]0, +\infty[$.

(٥) إن $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$ ، و $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$.

البرهان

لما كانت الدالة $\exp$ ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، فإنها مستمرة على $\mathbb{R}$. واستنادا إلى (٧.٥٢) ، نرى أنه لما كان $\exp 0 = 1 \neq 0$ ، فلا يمكن أن تأخذ $\exp$ القيمة 0 في أية نقطة x من $\mathbb{R}$. وبما أن $\exp 0 = 1 > 0$ ، فإنه يترتب على نظرية القيمة المتوسطة (٦.١٢) أن $\exp x > 0$ ، أيا كان العدد الحقيقي x . وبذا يتم إثبات (١) .

أما (٢) فتنتج من النظرية (٧.٢٩١) ، إذا لاحظنا أن $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. وللتحقق من صحة الدعوى (٣) ، نعرّف الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x) = \exp(x) - 1 - x$. إن f دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، كما أن $f'(x) = \exp(x) - 1$. وبما أن $\exp$ متزايدة تماما في $\mathbb{R}$ ، و $\exp 0 = 1$ ، فإننا نستنتج أن $f'(x) < 0$ ، أيا كان العدد السالب x ، وأن $f'(x) > 0$ أيا كان العدد الموجب x . لذا ، فإننا نجد بالرجوع ثانية إلى النظرية (٧.٢٩١) أن f متناقصة تماما في $]-\infty, 0]$ ، ومتزايدة تماما في $[0, +\infty[$. ولما كان $f(0) = 0$ ، فإننا نستنتج أن $f(x) \geqslant 0$ أيا كان x من $\mathbb{R}$ ، وأن الشرط اللازم والكافي كي تقوم مساواة بين الطرفين ، هو أن يكون $x = 0$. وبذا يتم إثبات (٣) .

لننتقل الآن إلى بيان صحة (٤) . لما كانت الدالة $\exp$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ، فإننا نجد استناداً إلى النظريتين (٥.١٩٦) و(٣.٧٥) أن مدى $\exp$ مجال ، ويبين الشق (١) أن هذا المجال محتوى في $]0, +\infty[$. نلاحظ أن قيم الدالة $\exp$ يمكن أن تأخذ قيماً كبيرة بقدر ما نشاء استنادا إلى الشق (٣) ، كما أن قيم هذه الدالة يمكن أن تأخذ قيما صغيرة موجبة بقدر ما نشاء ، استنادا إلى الشق (١) من (٧.٥٤) ، الأمر الذي يجعل من مدى $\exp$ مساويا $]0, +\infty[$

اما النهاية الأولى في (٥) فتنتج مباشرة من (٣) ، في حين أن النهاية الثانية ناتجة من (١) ومن الشق (١) للنتيجة (٧.٥٤) .

لننتقل الآن إلى الدوال اللوغاريتمية .

٧.٥٦ ــــ تعريف (الدالة اللوغاريتمية)

تعرّف الدالة اللوغاريتمية ، التي نرمز لها بـ $\log$ ، على أنها الدالة العكسية للدالة $\exp$. ولما كانت $\exp$ متزايدة تماما في $\mathbb{R}$ (٧.٥٥) ، فإن الدالة العكسية $\log$ موجودة (١.٣٩٩٩٢) .

٧.٥٧ ــــ نظرية

(١) إن ساحة الدالة $\log$ هي $]0, +\infty[$ ، ومداها $\mathbb{R}$ ، و $\log 1 = 0$

(٢) الدالة $\log$ متزايدة تماما في $]0, +\infty[$

(٣) إن الدالة $\log$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ، كما أنه أيا كان العدد الموجب x ، فإن

$$\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}\quad,\quad \frac{d^n}{dx^n}(\log x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\qquad (n=2,3,\ldots)$$

(٤) أيا كان العدد الموجب x ، فإن $\log x \leqslant x-1$ ، والشرط اللازم والكافي كي تحل مساواة بين الطرفين (محل $\leqslant$) ، هو أن يكون $x=1$.

البرهان

بما أن ساحة ومدى $\exp$. هما $\mathbb{R}$ و $]0,+\infty[$ على الترتيب (٧،٥٥) ، فإن ساحة ومدى الدالة العكسية $\log$. هما على الترتيب $]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}$ (١،٣٩٩٦) . ولما كان $\exp 0=1$ ، فإن $\log 1=0$ ، وبذا يتم إثبات (١) .

أما (٢) فناتج مباشرة عن النظرية (١،٣٩٩٩٢) .

أما كون الدالة $\log:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $]0,+\infty[$ ، فناتج عن الشق (٣) من النظرية (٧،٢٩٢) ، الذي يقرر كذلك أنه أيا كانت النقطة y من $\mathbb{R}$ ، فإن

$$(\log)'(\exp y)=\frac{1}{\exp'(y)}$$

فإذا رمزنا لـ $\exp y$ بـ x ، ولاحظنا أن $\exp'(y)=\exp y$ ، فإننا نجد أن $(\log)'(x)=\frac{1}{x}$ ، أي $\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}$
ويتم التوصل إلى الدستور الذي يعطي $\frac{d^n}{dx^n}(\log x)$ بالاستقراء .

وأما الشق (٤) من نظريتنا فينتج رأسا من الشق (٣) في النظرية (٧،٥٥) .

٧،٥٨ — نظرية

أيا كان العددان الحقيقيان الموجبان x_1, x_2 ، فإن

$$\log(x_1x_2)=\log x_1+\log x_2$$

البرهان

إذا كان $\log x_2=y_2\ ,\ \log x_1=y_1$ ، فإن $x_2=\exp y_2\ ,\ x_1=\exp y_1$. لذا نجد وفق (٧،٥٣)

$$\log(x_1x_2)=\log(\exp y_1.\exp y_2)=\log[\exp(y_1+y_2)]$$

ولما كانت الدالتان exp و log عكسيتين ، فإننا نجد أن

$$\blacksquare\ .\ \log(x_1x_2) = y_1 + y_2 = \log x_1 + \log x_2$$

٧,٥٩ — نتيجة

يترتب على النظرية (٧,٥٨) ما يلي :

(١) أياكان العدد الحقيقي الموجب x ، فإن

$$\log x + \log(1/x) = \log 1 = 0$$

(٢) أياكانت الأعداد الحقيقية الموجبة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، فإننا نجد (باستخدام الاستقراء الرياضي) .

$$\log(x_1x_2 \ldots x_n) = \log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n$$

ونجد بوجه خاص أنه إذا كان x عددا حقيقيا ما ، و n عددا طبيعيا ، فإن

$$\log(x^n) = n \log x$$

٧,٥٩١ — تعريف (دالة القوة)

ليكن a عددا حقيقياً موجبا . **تعرف دالة قوة** a بأنها الدالة $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$f_a(x) = \exp(x \log a)$$

لنفترض x عدداً عاديا ما ، وليكن $x = \frac{m}{n}$ ، حيث m,n عددين صحيحين $(n \neq 0)$. عندئذ نلاحظ أن

$$(f_a(x))^n = (\exp(\frac{m}{n} \log a))^n$$

$$= \exp(m \log a), \qquad \text{(وفق (٧,٥٤))}$$

$$= (\exp(\log a))^m \qquad \text{(وفق (٧,٥٩))}$$

$$= a^m$$

وبالتالي ، فإننا نجد أن $f_a(\frac{m}{n}) = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ (*) . إن هذا يبرر لنا الرمز لدالة قوة a بـ a^x . وهكذا ، فإننا

(*) نفترض في القارىء هنا معرفته للقوة t للعدد x حيث x عدد موجب و t عدد عادي .

نعرف a^x على أنها

$$a^x = \exp(x \log a) \qquad (x \in R)$$

فإذا رمزنا للعدد exp 1 بـ e . فإن e > 0 ،كما يكون

$$\exp x = e^x$$

ونترك للقارىء التحقق من أن

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

٧,٥٩٢ — ملاحظة

علينا عدم الخلط بين القوة x للعدد (الموجب) a . وهو قيمة دالة قوة a في النقطة x . أي a^x،وبين القوة a للعدد (الموجب) x وهي عدد نرمز له بـ x^a،ويعرف بالدستور التالي

$$x^a = \exp(a \log x) \qquad (x \in R^+)$$

نستنتج من هذا أن

$$\frac{d}{dx}(x^a) = \exp(a \log x) . \frac{a}{x} = x^a . \frac{a}{x} = a x^{a-1}$$

سنورد الآن دالتين جديدتين تعرّفان بدلالة الدالة الأسية،هما الدالتان الزائديتان .

٧,٥٩٣ — تعريف (الدالتين الزائديتين)

نعرّف **الجيب الزائدي** و**جيب التمام الزائدي**،اللذين نرمز لهما على الترتيب sh و ch . على أنهما دالتان تحدّدان بالدستورين

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{و} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

٧,٥٩٤ — نتائج

يترتب على التعريف (٧.٥٩٣) مباشرة أن ساحة كلّ من الدالتين sh و ch هي $\mathbb{R}$. وأن الدالة ch زوجية،والدالة sh فردية . وأن لها مشتقات من جميع المراتب على $\mathbb{R}$ (أي أنهما تنتميان الى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$) . وأن

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x$$

يترتب كذلك على التعريف (٧,٥٩٣) و(٧,٥٣) أنه أياً كان العددان الحقيقيان x_1 , x_2، فإن

$$sh(x_1+x_2) = sh\,x_1\,ch\,x_2 + ch\,x_1\,sh\,x_2$$

$$ch(x_1+x_2) = ch\,x_1\,ch\,x_2 + sh\,x_1\,sh\,x_2$$

وبوجه خاص ، فأياً كان العدد الحقيقي x يكون

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

نلاحظ أن الدالة sh متزايدة تماما ومداها R ، وبالتالي فلها دالة عكسية ، نرمز لها بـ arg sh ساحتها ومداها R . أما الدالة ch ، فليست كذلك ، إلا أننا إذا أخذنا مقصور هذه الدالة على $]0,+\infty[$ ، فإن هذا المقصور متزايد تماما في $]0,+\infty[$ ، وبالتالي فله دالة عكسية . سنرمز لمقصور ch على $]0,+\infty[$ بـ Ch ، ولدالته العكسية Arg ch ، حيث يشير الحرف الكبير A إلى أن Arg ch ليس بالدالة العكسية لـ ch بل لمقصور ch . ومن الواضح ، أن ساحة Arg ch المجال $]1,+\infty[$ ، ومداه $]0,+\infty[$.

ونترك للقارىء التحقق من أن

$$\arg sh\,x = \log(x+\sqrt{x^2+1})\ ,\ Arg\,ch\,x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$

وأن الدالة arg sh قابلة للاشتقاق على ساحتها كلها ، وأن الدالة Arg ch قابلة للاشتقاق في كل نقطة من مداها باستثناء النقطة 1 ، وأن

$$\frac{d}{dx}(\arg sh\,x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad و \quad \frac{d}{dx}(Arg\,ch\,x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

٧,٥٩٥ — تعريف (الدوال المثلثاتية)

نعرّف **دالة الجيب** ، بأنها ذلك الحل $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad (\circ)$$

الذي يحقق الشرطين $\Phi(0) = 0\ ,\ \Phi'(0) = 1$. ونعرّف دالة **جيب التمام** ، بأنها مشتق دالة الجيب .

سنبين الآن أن حل المعادلة (٥) (الذي نقبل بوجوده) ، والذي يحقق الشرطين السابقين وحيد (الأمر الذي يترتب عليه بالطبع أن دالة جيب التمام تتعين بصورة وحيدة بالشرطين المذكورين) .

لنفترض أن Ψ و Φ حلان للمعادلة (٭) ، يحققان الشرطين الواردين في التعريف ، وليكن $\chi = \Psi - \Phi$، عندئذ ، يوجد للدالة χ مشتق أول ومشتق ثان على R، كما يكون $\chi'(0) = \chi(0) = 0$ ، $\chi''(x) + \chi(x) = 0$ ، أيا كان x من R . ولإثبات وحدانية حل المعادلة (٭) علينا البرهان بأن $\chi(x) = 0$ أيا كان x من R ، الأمر الذي يُستخلص من النظرية التالية .

٧,٥٩٦ — نظرية

لتكن χ دالة حقيقية ساحتها R ، لها مشتق أول ومشتق ثان على R ، وتحقق المعادلة التفاضلية $\chi''(x) + \chi(x) = 0$ أيا كان x من R ، وليكن $\chi(0) = \chi'(0) = 0$. عندئذ ، لا بد أن يكون $\chi(x) = 0$ ، أيا كان x من R .

البرهان :

لنأخذ الدالة الحقيقية $f = \chi^2 + \chi'^2$. من الواضح ، أن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x من R ، وأن

$$f'(x) = 2\chi(x)\chi'(x) + 2\chi'(x)\chi''(x) = 2\chi(x)\chi'(x) - 2\chi'(x)\chi(x) = 0$$

وبالتالي ، فإن f تحقق شروط النظرية (٧,٢٩) ، حيث $I = R$ ، إذن f دالة ثابتة . ولما كان $f(0) = 0$ ، فإن $f(x) = 0$ ، أيا كان x من R . ولما كان المقداران $(\chi'(x))^2$ و $(\chi(x))^2$ حقيقيين وغير سالبين ، فإن $\chi(x) = 0$ ، أيا كان x من R . ■

تدل هذه النظرية على أن (٧,٥٩٥) يعرّف دالة جيب ، ودالة جيب تمام بشكل وحيد ، وسنرمز لهما بـ sin و cos على التوالي .

٧,٥٩٧ — نتائج

يترتب مباشرة على التعريف (٧,٥٩٥) أن ساحة الدالة sin هي R و $\sin 0 = 0$ ، وأن $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$، أياكانُ x من R . ولإيجاد مشتق الدالة cos (التي ساحتها R أيضاً) نلاحظ أن

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(\sin x)\right] = \frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x$$

وذلك من تعريف الدالة sin بالمعادلة (٭) . ويبين الدستوران هذان ، أن لكلٍّ من الدالتين sin و cos مشتقات من جميع المراتب ، (أي أنهما تنتميان إلى C^∞ على R) .

٧,٥٩٨ — نظرية

الدالة sin فردية . والدالة cos زوجية .

البرهان

لنعرف الدالة $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $\chi(x) = \sin x + \sin(-x)$. عندئذ يكون

$$\chi'(x) = \cos x - \cos(-x) \quad , \quad \chi''(x) = -\sin x - \sin(-x) = -\chi(x)$$

فإذا أضفنا إلى المعادلة $\chi''(x) + \chi(x) = 0$ الناتجة $\chi(0) = \chi'(0) = 0$، وجدنا أن $\chi(x) = 0$ أيا كان x من R (٧.٥٩٦) . الأمر الذي ينتج عنه أيضاً أن $\chi'(x) = 0$، أيا كان x من R . وهو المطلوب . ■

٧,٥٩٩ — نظرية

أيا كان العددان الحقيقيان x_1 , x_2 . فإن

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

وبوجه خاص . فأيا كان العدد الحقيقي x . فإن

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(الأمر الذي ينتج عنه أن مدى كل من sin و cos هو $[-1, +1]$) .

البرهان

لنأخذ الدالة $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$\chi(x_1) = \sin(x_1 + x_2) - \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2$$

بافتراض x_2 أي عدد حقيقي مثبت . عندئذ يكون

$$\chi'(x_1) = \cos(x_1 + x_2) - \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$$

$$\chi''(x_1) = -\sin(x_1 + x_2) + \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 = -\chi(x_1)$$

فإذا لاحظنا فضلاً عن ذلك أن $\chi(0) = \chi'(0) = 0$. فإنه يترتب على النظرية (٧.٥٩٦) أن $\chi(x_1) = 0$. أيا كان x_1 من R . الأمر الذي ينتج عنه أيضاً أن $\chi'(x_1) = 0$. أيا كان x_1 من R . ولما كان x_2 أي عدد حقيقي . فإننا نكون قد أثبتنا المساواتين الاوليين من النظرية . أما المساواة الأخيرة في نص النظرية . فنترك التحقق منها للقارىء . ■

سنورد الآن نظرية هامة دون برهان .

٧,٥٩٩١ — نظرية :

يوجد عدد حقيقي موجب ، نرمز له بـ π تصح معه الدعاوى التالية :

(١) أيا كان العدد الحقيقي x ، فإن

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \text{و} \quad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

(٢) إن كلا من $\sin , \cos$ دالة دورية دورها 2π ، وهذا يعني أن 2π هو أصغر عدد موجب يحقق المساواتين

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{و} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

أيا كان العدد الحقيقي x .

(٣) الدالة $\sin$ متزايدة تماما في $[-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}]$ ومتناقصة تماما في $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

(٤) $\sin\frac{\pi}{2} = 1 , \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 = \sin(\frac{3\pi}{2}) , \sin 0 = 0 = \sin\pi$.

(٥) الدالة $\cos$ متزايدة تماما في $[-\pi,0]$ ، ومتناقصة تماما في $[0,\pi]$.

(٦) $\cos 0 = 1 , \cos\pi = -1 = \cos(-\pi) , \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 = \cos(-\frac{\pi}{2})$

(٧) إن لكل من الدالتين $\sin , \cos$ ، ومقصور $\sin$ على $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ، ومقصور $\cos$ على $[0,\pi]$ مدى واحداً هو $[-1,1]$.

إن الدالة $\sin$ ليست متباينة ، وبالتالي ليس لها دالة عكسية . بيد أنه ، إذا أخذنا مقصور هذه الدالة على مجال تكون فيه متزايدة تماما أو متناقصة تماما ، فإن المقصور هذا له دالة عكسية . ولما كانت $\sin$ متزايدة تماما في $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ، فإننا نأخذ مقصور $\sin$ على $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ، الذي نرمز له بـ Sin (S حرف كبير) ، وسنرمز للدالة العكسية لهذه الدالة بـ Arc sin . ويبين الشق (٧) من النظرية السابقة بأن ساحة Arc sin ، هي $[-1,1]$ ، ومداها $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. واستنادا إلى (٧,٢٩٢)،نرى أن الدالة Arc sin مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,1]$ ، كما أنها قابلة

للاشتقاق في كل نقطة x من $]-1,1[$ ، ومشتقها يعطى بالدستور

$$(\text{Arcsin})'(\sin y) = \frac{1}{\cos y}$$

فإذا رمزنا بـ x لـ $\sin y$ ، فإن $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ ، ونجد بالتالي أن :

$$\frac{d}{dx}(\text{Arcsin}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

هذا ، ونجد نتائج مماثلة تتعلق بالدالة cos . فإذا أخذنا المجال $[0,\pi]$ ، الذي تتزايد فيه الدالة cos تماما فإننا نرمز لمقصور cos على $[0,\pi]$ بـ Cos (C حرف كبير) ، كما نرمز للدالة العكسية بـ Arc cos . ومن السهل التحقق بأن ساحة Arc cos هي $[-1,1]$ ، ومداها $[0,\pi]$ ، وأن Arc cos مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,1]$ ، وأنها قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $]-1,1[$ ، ومشتقها يعطى بالدستور

$$\frac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot$$

هذا ، ونترك للقارىء التحقق من أنه أيا كان x من $[-1,1]$ ، فإن

$$\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} \cdot$$

ونشير أخيراً إلى أن خواص الدوال

$$\tan = \frac{\sin}{\cos},\ \text{cosec} = \frac{1}{\sin},\ \sec = \frac{1}{\cos},\ \cot = \frac{\cos}{\sin}$$

تنتج من خواص الدالتين sin , cos ، إلا اننا لن ندخل في التفاصيل .

تمارين

سنفترض في التمارين التالية جميعاً أن الدوال الواردة فيها ، هي دوال حقيقية لمتغير حقيقى ما لم تنص على خلاف ذلك .

المشتق

(٧ — ١)

لتكن f_1 , f_2 , g_1 , g_2 أربع دوال قابلة للاشتقاق على $]a,b[$. ولنعرّف الدالة φ بالمعين (المحدد) التالي :

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

(١) بين أن φ قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، وأن

$$\varphi' (x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) \end{vmatrix}$$

(٢) هل يمكنك التوصل الى تعميم هذه النتيجة على دالة محددة بمعين من المرتبة n ؟

(٧ — ٢)

نقول عن دالة f ساحتها S إنها **فردية** ، إذا تحقق الشرطان التاليان :

(١) — إذا كان $x \in S$ ، فإن $-x \in S$. (٢) — أن يكون $f(-x) = -f(x)$ ، أيا كان x من S . ونقول عن f إنها زوجية ، إذا تحقق الشرطان التاليان : (١) — إذا كان $x \in S$ ، فإن $-x \in S$. (٢) — أن يكون $f(-x) = f(x)$ ، أيا كان x من S . برهن أنه إذا كانت f فردية ، فإن f' زوجية ، وأنه إذا كانت f زوجية ، فإن f' فردية . هل من الممكن أن تكون f' فردية أو زوجية عندما تكون f لا فردية ولا زوجية ؟

(٧ — ٣)

نقول عن دالة f ، ساحتها S إنها **دورية** ، إذا تحقق الشرطان التاليان :

(١) أن يوجد عدد حقيقي λ (يدعى **دور** f) ، بحيث أنه إذا كان $x \in S$ ، فإن $x + \lambda \in S$ و $x - \lambda \in S$.

(٢) أن يكون $f(x) = f(x + \lambda)$ ، أيا كان x من S . برهن أنه إذا كانت للمشتق دورية ، فإن f' دورية كذلك . وإذا كان دور f هو λ ، **فهل** من الضروري أن يكون λ دوراً للمشتق f' كذلك ؟

(٧ — ٤)

إذا كان $f(x) = x+\lambda$ ، حيث λ عدد حقيقي ما ، وكانت g دالة حقيقية ساحتها R ، بحيث $f \circ g = g \circ f$ ، فبرهن عندئذ أن g' دالة دورية .

(٧ — ٥)

ليكن α عدداً حقيقياً غير صفري . بين أن الشرط اللازم والكافي كي يوجد للدالة αf مشتق في النقطة x_0 ، هو أن يوجد للدالة f مشتق في x_0 .

(٧ — ٦)

أورد دالة f غير قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 من ساحتها ، في حين تقبل الدالة f^2 مشتقاً في هذه النقطة .

(٧ — ٧)

أورد دالة مستمرة على $\mathbf{R}$ ، وغير قابلة للاشتقاق على مجموعة جزئية غير منتهية من $\mathbf{R}$.

(٧ — ٨)

برهن على صحة نظرية لايبنتز Leibniz التالية : إذا كانت f,g دالتين قابلتين للاشتقاق n مرّة في النقطة x_0 ، فإن fg قابلة للاشتقاق n مرّة في x_0 ويكون

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)$$

حيث
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(٧ — ٩)

لتكن f دالة على مجال مفتوح I . برهن أنه إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 من I ، فإن

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

أورد مثالاً معاكساً يبين أن النهاية

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

قد تكون موجودة دون أن تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 .

(٧ — ١٠)

نقول عن دالة f ساحتها $I =]a,b[$ ، إنها تحقق شرط ليبشتز Lipschitz في النقطة ξ من I ، إذا وجد عدد حقيقي موجب M ، ووجد جوار $N(\xi,\delta)$ ، بحيث أن

$$x \in N(\xi, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| \leq M|x - \xi|$$

برهن أنه إذا كان المشتق $f'(\xi)$ موجودا ، فإن f تحقق شرط ليبشتز في ξ .

خواص الدوال القابلة للاشتقاق

(٧ — ١١)

بين أن دستور نظرية القيمة الوسطى (٧،٢٣) يمكن أن يكتب على الشكل

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x+\Theta h) \qquad (0 < \Theta < 1)$$

عين Θ كدالة لـ x,h في الحالتين التاليتين :

$$\text{(i)} \quad f(x) = x^2 \quad , \quad \text{(ii)} \quad f(x) = x^3$$

إذا افترضنا $x \neq 0$ ، فأوجد في كلٍّ من هاتين الحالتين $\lim_{h \to 0} \Theta$

(٧ — ١٢)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I ، ولنفترض أن النهاية $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودة في نقطة x_0 من I . بين أن قيمة هذه النهاية ، لا بد وأن تكون $f'(x_0)$.

(٧ — ١٣) :

لتكن f دالة مستمرة على المجال المفتوح I ، وقابلة للإشتقاق على I ، ربما باستثناء النقطة x_0 من I . فإذا كانت النهاية $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ موجودة وتساوي a ، فبين أن $f'(x_0)$ ، لا بد وأن تكون موجودة وتساوي a .

(٧ — ١٤)

لنفترض أن f دالة مستمرة على $[0,1]$ ، وأن $f(0)=0$ ، وأن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $]0,1[$. برهن على أنه إذا كانت f' دالة متزايدة في $]0,1[$ ، فلا بد أن تكون كذلك الدالة g المحددة بالمعادلة $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

(٧ — ١٥)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ولتكن $x_o \in]a,b[$. لنورد الشرط التالي : يقابل كلّ عدد موجب ε كرة مفتوحة $N(x_o,\delta)$ ، نصف قطرها δ يتبع ε فقط دون x_o ، بحيث أنه . إذا كان $x \in N'(x_o,\delta)$ ، فإن

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

برهن أنه إذا تحقق هذا الشرط على جميع نقاط $]a,b[$ ، فلا بد ان تكون f' مستمرة على $]a,b[$.

(٧ — ١٦)

لتكن f دالة ساحتها $\mathbb{R}$ تحقق الشرط $|f(x) - f(y)| < (x-y)^2$ أيا كان العددان الحقيقيان x,y .
بين أن f دالة ثابتة .

(٧ — ١٧)

إذا كانت $a_0,a_1,\ldots,a_n$ أعدادا حقيقية ترتبط فيما بينها بالعلاقة

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$$

فثمة نقطة (واحدة على الأقل) x تنتمي إلى $]0,1[$ ، بحيث يكون

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

(٧ — ١٨)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية على $]a,b[$. استخدم قاعدة لوبيتال لإثبات أن :

$$f^{(2)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

نظرية تايلور

(٧ — ١٩)

لتكن f دالة حقيقية قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة على المجال المفتوح I ، ولتكن a,b نقطتين من I . لنفترض Ψ ، Φ دالتين مستمرتين على $[a,b]$ ، وقابلتين للاشتقاق على $]a,b[$ ، ولنفترض أنه أيا كان x,y من $]a,b[$ ، حيث $a<y<x$ ، فإن المعين (المحدد)

$$\begin{vmatrix} \Phi'(y) & \Psi'(y) \\ \Phi(x) & \Psi(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

(١) برهن أنه إذا كانت F دالة مستمرة على $[a,x]$ (حيث $a<x<b$) وقابلة للاشتقاق على $]a,x[$ ، فثمة عدد c من $]a,x[$ ، بحيث يكون المعين

$$\begin{vmatrix} F'(c) & \Phi'(c) & \Psi'(c) \\ F(a) & \Phi(a) & \Psi(a) \\ F(x) & \Phi(x) & \Psi(x) \end{vmatrix} = 0$$

(استخدم هنا نظرية رول) .

(٢) لنأخذ من أجل t، حيث $a<t<b$ ، الدالة

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

بين أن F مستمرة على $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، وأن

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

أثبت بعد ذلك أن ثمة عدداً c من $]a,x[$ ، بحيث يكون

$$F(a) = -\frac{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Psi(a) \\ \Phi(x) & \Psi(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi'(c) & \Psi'(c) \\ \Phi(x) & \Psi(x) \end{vmatrix}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(٣) إذا رمزنا للطرف الأيمن من المساواة الأخيرة بـ $R_{n+1}(x,a)$ (الذي يسمى بالباقي)، فأثبت أنه نجد الدساتير التالية لـ $R_{n+1}(x,a)$ في حدود اختياراتٍ مناسبة للدالتين Φ, Ψ .

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{[\Phi(x) - \Phi(a)]f^{(n+1)}(c)}{\Phi'(c)\, n!}(x-c)^n , \qquad (a < c < x) \qquad \text{(أ)}$$

وذلك إذا كان $\Phi'(t) \neq 0$ ، أياً كان t من $]a,b[$.
(يسمى هذا المقدار باقي شلوميلك Schlömilch . اختر هنا Ψ أي دالة ثابتة غير صفرية).

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p.n!}(x-a)^p (x-c)^{n+1-p} \qquad (a < c < x) \qquad \text{(ب)}$$

(يسمى هذا المقدار باقي روش Roche . اختر هنا في (أ) $\Phi(t) = (x-t)^p$ ، حيث $1 < p < n+1$).

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (a < c < x) \qquad \text{(جـ)}$$

(يسمى هذا المقدار باقي لاغرانج Lagrange ، وهو الباقي الذي وجدناه في الدستور الذي استنتجناه في نظرية تايلور (٧,٣٢) . ضع هنا $p = n+1$ في (ب)).

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)(x-c)^n \qquad (a < c < x) \qquad \text{(د)}$$

(يسمى هذا المقدار، باقي كوشي Cauchy . اختر هنا في (ب) $p = 1$).

(٧ — ٢٠)
بين أن كثير حدود تايلور من الدرجة الثالثة للدالة sin في النقطة $\frac{\pi}{4}$ هو

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3$$

تحقق من أن الخطأ المرتكب عند اعتبار هذا المقدار تقريباً للدالة sin لا يتجاوز

$$\frac{1}{6}\left|x - \frac{\pi}{4}\right|^3$$

التقارب المنتظم والمفاضلة

(٧ — ٢١)

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ ، متوالية من الدوال القابلة للاشتقاق على المجال $]0,1[$ ، حيث $f_n(x) = n$

(١) بين أن المتوالية $\{f'_n\}, n\in N$ تتقارب بانتظام من دالة g على $]0,1[$.

(٢) أثبت أن المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ ليست متقاربة .

(٣) هل عدم تقارب المتوالية $\{f_n\}, n\in N$ يتناقض والنظرية (٧،٤٢)؟ إدعم إجابتك بالمبررات الضرورية .

(٧ — ٢٢)

لنأخذ متوالية الدوال $\{f_n\}, n\in N$ الحقيقية على $\mathbb{R}$ ، حيث يعطى f_n بالدستور $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ ، ولتكن f الدالة الثابتة المحددة بالدستور $f(x)=0$ ، أيا كان x من $\mathbb{R}$. برهن أن متواليتنا تتقارب بانتظام من الدالة f على $\mathbb{R}$ ، وأن

$$f'(0) \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(0)$$

(٧ — ٢٣)

لنأخذ متوالية الدوال $\{f_n\}, n\in N$ الحقيقية على $\mathbb{R}$ ، حيث يعطى f_n بالدستور

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

(١) أوجد دالة النهاية f للمتوالية $\{f_n\}, n\in N$ ، ودالة النهاية g للمتوالية $\{f'_n\}, n\in N$.

(٢) بين أن الدالة $f'(x)$ موجودة أيا كان x ، وأن $f'(0)=g(0)$. ما هي قيم x التي يكون عندها $f'(x)=g(x)$ ؟ .

(٣) ما هي المجالات الجزئية من $\mathbb{R}$ ، التي تتقارب عليها $\{f_n\}, n\in N$ من f بانتظام ؟

(٤) ما هي المجالات الجزئية من $\mathbb{R}$ ، التي تتقارب عليها $\{f'_n\}, n\in N$ من g بانتظام ؟

الدوال الابتدائية

(٧ — ٢٤)

أوجد المشتق من المرتبة n لكلٍّ من الدوال الآتية، التي قيمها في النقطة x تعطى بالدساتير التالية :

(i) $e^x \cos 2x$ (iv) $x^2 \sin 3x$ (vii) $x^2 \log x$

(ii) $\cos^2 x$ (v) $x^3 e^{2x}$ (viii) 2^x

(iii) $\dfrac{2}{1-x^2}$ (vi) $\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)}$ (ix) $(1+x)\, e^{-2x}$

(٧ — ٢٥)

برهن أن

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha) \right] = e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + n\alpha)$$

(٧ — ٢٦)

لنأخذ الدالة الحقيقية $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$

(١) بين أن ساحة tan ، هي المجموعة $\{x \in R : x \neq (n+\frac{1}{2})\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

(٢) أثبت أن tan دالة فردية ، وأنها دورية دورها π .

(٣) برهن أن للدالة tan مشتقات من جميع المراتب في كل نقطة من ساحتها ، وأن

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

(٤) برهن أنه حيث تكون $\tan a, \tan b, \tan(a+b)$ موجودة ، فإن

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

(٥) بين أن tan متزايدة تماما في $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(٦) إذا رمزنا بـ Tan لمقصور tan على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ، فإن مدى كل من Tan و tan يساوي R .

(٧) إذا رمزنا للدالة العكسية لـ Tan بـ Arc tan ، فأثبت أنه أيا كان x من R ، فإن

$$\frac{d}{dx}(\text{Arc} \tan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(٨) ما هي قيم x,y التي يكون من أجلها

$$\text{Arc} \tan x + \text{Arc} \tan y = \text{Arc} \tan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$



الفصل الثامن

المكاملة

Integration

ذكرنا في الفصل السابق أن علم التفاضل برز إلى الوجود عند محاولة تعيين ميل المماس لمنحن في نقطة منه . وقد وجدنا وقتئذ أن حل هذه المسألة تم باستثمار مفهوم النهاية،الذي أفردنا له الفصل الرابع من هذا الكتاب. أما نشوء علم التكامل ، فقد حدث عند التصدي لمسألة هندسية أخرى ، ألا وهي حساب مساحة الرقعة المستوية الموجودة تحت بيان دالة . ورغم أن هذا يبين أن المفاضلة والمكاملة مسألتان مختلفتان تماما ، إلا أننا سنرى أن ثمة رباطا وثيقا فيما بينهما ، بحيث يمكننا القول بشكل غير دقيق بأن المفاضلة والمكاملة عمليتان متعاكستان .

وتجدر بنا الإشارة إلى أن تعريفنا للمكاملة في هذا الفصل سيكون ذا صبغة تحليلية صرفة ، ولن ينطلق من المفهوم الهندسي الذي أوردناه ، والذي يحدّ من إمكان تطوير علم التكامل،ويجعل تطبيقاته مقصورة على مجالات ضيقة ومحدودة . كذلك ، فإن فكرة التكامل استعملت في بادىء الامر دون تحديد تلك الدوال التي تصلح للمكاملة ، وفي الحقيقة،فإن مفهوم الدالة نفسها لم يكن محددا تماما . ويعزى الفضل في أول تعريف دقيق للتكامل إلى الرياضي الالماني الكبير **ريمان** Riemann في أواخر القرن التاسع عشر . ورغم هذا ، فإن تعريفنا لتكامل ريمان يختلف عن ذلك ، الذي جاد به ريمان ، إلا أنه مكافىء له . ويعود إلى **داربو** Darboux . وهنالك نظريات أخرى ، تعطي تكاملات لأنماط أخرى من الدوال ، كنظرية تكامل **ستيلجس** Stieltjes ، ونظرية تكامل **لوبيك** Lebesgue ، وسنميز تكاملنا عن التكاملات الأخرى بتسميته تكامل ريمان — داربو ، أو اختصارا،تكامل ريمان .

هذا ، وسنفترض أن الدوال المدرجة جميعاً في هذا الفصل دوال حقيقية **للمتغير** الحقيقي،ما لم ننص على خلاف ذلك .

٨,١ — تكامل ريمان

The Riemann Integral

٨,١١ — تعاريف

ليكن $[a,b]$ مجالا مغلقا محدودا . نقول عن P إنها **تجزئة** لـ $[a,b]$. إذا كانت P مجموعة منتهية من نقاط $[a,b]$ تحوي النقطتين a,b . ولما كانت كل مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية يمكن ترتيبها تصاعدياً . فإن التجزئة P المؤلفة من $n+1$ من النقاط $x_0,x_1,\ldots,x_n$ ، يمكن اعتبارها مرتبة بالشكل $a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$. وهكذا . فإن التجزئة P لـ $[a,b]$ هي المجموعة $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$. حيث العناصر x_k مرتبة بالشكل السابق . وعندئذ . يسمى المجال $I_k = [x_{k-1},x_k]$ **مجالا جزئيا** k **للتجزئة** P . حيث $k \in <1,n>$ (حيث نستعمل الرمز $<1,n>$ للدلالة على المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$) . وسنضع $|I_k| = x_k - x_{k-1}$.

وإذا كانت P,P' تجزئتين لـ $[a,b]$. فإننا نقول إن P' **تفتيت لـ** P إذا كان $P' \supseteq P$. وعلى سبيل المثال . فإن $\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$ تفتيت للتجزئة $\{0,\frac{1}{3},1\}$ للمجال $[0,1]$. وسنرمز لمجموعة كل تجزئات $[a,b]$ بالرمز $\mathcal{P}[a,b]$. فمثلاً . يكون $\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\} \in \mathcal{P}[0,1]$. لتكن $f:[a,b] \to R$ دالة محدودة (٦.٢١) و P تجزئة لـ$[a,b]$. فإذا رمزنا بـ $M_k(f)$, $m_k(f)$ للمقدارين

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in I_k\} \quad \text{و} \quad m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$$

أيا كان k من $<1,n>$. فإننا نسمي العددين على التوالي

$$\overline{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,|I_k|$$

$$\underline{L}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,|I_k|$$

مجموعي ريمان (٭) **الأعلى والأدنى** للدالة f بالنسبة للتجزئة P .

من الواضح ، أنه أيا كان k من $<1,n>$ ، فإن $m_k(f) < M_k(f)$ ، وبالتالي فإن $L(f,P) < U(f,P)$.

(٭) يطلق احيانا على هذين المجموعين مجموعي داربو الأعلى والأدنى للدالة f ، ذلك ان داربو هو أول من عرّفها .

وتنظم النظرية التالية العلاقات التي تربط بين مجموعي ريمان الأعلى والأدنى بالنسبة لتجزئتين مختلفتين لـ $[a,b]$.

٨,١٢ — نظرية

لتكن $f:[a,b]\to R$ دالة محدودة . ولنفترض أن P,P' تجزئتين لـ $[a,b]$ بحيث يكون P' تفتيتا لـ P . عندئذ يكون

$$U(f,P') \leq U(f,P) \quad (1)$$

$$L(f,P') \geq L(f,P) \quad (2)$$

البرهان

لنفترض أن التفتيت P' للتجزئة $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ يحوي نقطة إضافية واحدة c . ولنفترض مثلا أن $x_{i-1} < c < x_i$ ، حيث i عدد ما من $<1,n>$. فإذا افترضنا الآن أن

$$M' = \sup\{f(x) : x\in[x_{i-1},c]\} \quad و \quad M'' = \sup\{f(x) : x\in[c,x_i]\}$$

فإننا نرى أن $M'' \leq M_i(f)$ و $M' \leq M_i(f)$. ويترتب على هذا أن

$$M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c) \leq M_i(f)\,|I_i|$$

إذن

$$U(f,P') \leq \sum_{k=1}^{i-1} M_k(f)\,|I_k| + M_i(f)(c-x_{i-1}) + M_i(f)(x_i-c)$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{n} M_k\,|I_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k\,|I_k| = U(f,P)$$

لنفترض الآن أن $P' = P\cup\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$. ولنرمز بـ $P^{(k)}$ (حيث $k=1,2,\ldots,m$) للتجزئة $P^{(k)} = P\cup\{c_1,c_2,\ldots,c_k\}$. من الواضح أن $P\subset P^{(1)}\subset P^{(2)}\subset\ldots\subset P^{(m)} = P'$ ، وأن كلاً من هذه التجزئات تحوي نقطة إضافية واحدة . إذا ما قورنت بالتجزئة السابقة لها . لذا نجد استنادا إلى ما تقدم أن

$$U(f,P') = U(f,P^{(m)}) \leq U(f,P^{(m-1)})$$

$$\leq U(f,P^{(m-2)})$$

$$\leq \ldots$$

$\leqslant U(f,P^{(1)})$

$\leqslant U(f,P)$

وبذا يتم إثبات المتراجحة (١) . أما المتراجحة (٢) فيتم إثباتها بصورة مماثلة . ■

٨,١٣ — نظرية

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة محدودة ، ولتكن P_1 , P_2 أي تجزئتين لـ $[a,b]$. عندئذ ، لا بد أن يكون $L(f,P_1)\leqslant U(f,P_2)$.

البرهان

إذا رمزنا لـ $P_1\cup P_2$ بـ P ، فإن $P_2\subseteq P$ و $P_1\subseteq P$. وبالتالي نجد استنادا إلى (٨,١٢) أن :

$$L(f,P_1)\leqslant L(f,P) \quad \text{و} \quad U(f,P)\leqslant U(f,P_2)$$

ولما كنا قد رأينا في (٨,١١) أن $L(f,P)\leqslant U(f,P)$ ، فإن النظرية صحيحة . ■

٨,١٤ — نتيجة

يترتب على النظرية (٨,١٣) أنه ، إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة محدودة وكان

$$M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\} \quad \text{و} \quad m=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}$$

فإن

$$m(b-a)\leqslant L(f,P_1)\leqslant U(f,P_2)\leqslant M(b-a) \qquad (*)$$

وذلك أيا كانت التجزئتان P_1 , P_2 لـ $[a,b]$.

وتبين هذه النتيجة مباشرة أن كلاًّ من المجموعتين

$$\{U(f,P):P\in\mathcal{P}[a,b]\} \text{ و } \{L(f,P):P\in\mathcal{P}[a,b]\}$$

لا بد وأن تكون محدودة .

٨,١٥ ــ تعريف

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة محدودة . نعرّف **تكاملي ريمان الأعلى والأدنى لـ f على** [a,b] ، اللذين نرمز لهما بـ $\overline{\int_a^b} f\,dx$ و $\underline{\int_a^b} f\,dx$ على الترتيب،كما يلي :

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf\{U(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup\{L(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}$$

هذا . وإن هذين التكاملين موجودان . لأننا وجدنا في (٨.١٤) . أن المجموعة $\{U(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}$ محدودة من الأدنى بـ $m(b-a)$. والمجموعة $\{L(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}$ محدودة من الأعلى بـ $M(b-a)$.

ونترك للقارىء . التحقق من أن $\underline{\int_a^b} f\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f\,dx$

ونقول عن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. إنها **قابلة للمكاملة وفق ريمان** على [a,b] إذا كان

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx$$

وعندئذ . نعرف القيمة المشتركة لتكاملي ريمان الأعلى والأدنى على أنها **تكامل ريمان على**[a,b] . ونرمز لهذا التكامل بأحد الشكلين التاليين :

$$\int_a^b f\,dx \qquad \text{أو} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

هذا وسنشير أحياناً إلى كون الدالة f قابلة للمكاملة وفق ريمان بقولنا إن f « قابلة للمكاملة »،وذلك بقصد الاختصار .

٨,١٦ ــ أمثلة :

(١) إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة ثابتة . أي إذا كان ثمة عدد حقيقي α، بحيث $f(x)=\alpha$ ، أيا كان x من [a,b] . فمن الواضح أنه إذا كانت P أية تجزئة لـ [a,b] . فإن

$$L(f,P) = U(f,P) = \alpha(b-a)$$

وبالتالي فان تكاملي ريمان الأعلى والأدنى متساويان. لذا . فإن دالتنا قابلة للمكاملة وفق ريمان على [a,b] . وتكاملها وفق ريمان على [a,b] هو

$$\int_a^b f\,dx = \alpha(b-a)$$

(٢) لنعمم المثال السابق ، بأن نفترض الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ المحدودة ثابتة على $]a,b[$ ، أي أن $f(x) = \alpha$ ، أياكان x من $]a,b[$. سنبين الآن أن f قابلة للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$ ، بغض النظر عن قيمتي f في a,b . وفي الحقيقة ، ليكن ε عددا موجبا ما أقل من $\frac{1}{2}(b-a)$ ، ولتكن P تجزئة لـ $[a,b]$ ، بحيث تحوي النقطتين $a+\varepsilon , b-\varepsilon$ ، فإذاكان

$$K = \max \{ \ |f(a)| \ , |\alpha| \ , |f(b)| \ \}$$

فإننا نجد

$$U(f,P) = \varepsilon \sup \{ f(x) : x \in [a,a+\varepsilon] \} + (b-a-2\varepsilon) \sup \{ f(x) : x \in [a+\varepsilon,b-\varepsilon] \}$$
$$+ \varepsilon \sup \{ f(x) : x \in [b-\varepsilon,b] \}$$
$$\leq K\varepsilon + \alpha(b-a-2\varepsilon) + K\varepsilon = \alpha(b-a) + 2\varepsilon(K-\alpha)$$

ونجد بصورة مماثلة أن

$$L(f,P) \geq \alpha(b-a) - 2\varepsilon(K+\alpha)$$

وبالتالي ، فإن

$$\alpha(b-a) - 2\varepsilon(K+\alpha) \leq \underline{\int_a^b} f\,dx \leq \overline{\int_a^b} f\,dx \leq \alpha(b-a) + 2\varepsilon(K-\alpha)$$

ولما كان ε اختيارياً ، فإننا نستنتج من هذا أن

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx = \alpha(b-a)$$

وهذا يعني أن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما أن

$$\int_a^b f\,dx = \alpha(b-a)$$

(٣) لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ محددة كالتالي :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{(عندما يكون } x \text{ عدداً عادياً)} \\ 0 & \text{(عندما يكون } x \text{ عدداً غير عادي)} \end{cases}$$

لما كان كل مجال جزئي من $[a,b]$ يحتوي على نقاط عادية وغير عادية ، فإننا نستنتج أنه أيا كانت التجزئة P لـ $[a,b]$ نجد

$$L(f,P) = 0 \quad , \quad U(f,P) = b-a$$

وبالتالي يكون

$$\underline{\int}_a^b f\,dx = 0 \quad و \quad \overline{\int}_a^b f\,dx = b-a$$

لذا ، فإن دالتنا غير قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

إن تعريفنا لتكامل ريمان،يمكننا من التوصل إلى النظرية التالية،التي تحدد السمات المميزة للدوال القابلة للمكاملة وفق ريمان .

٨,١٧ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للمكاملة وفق **ريمان** على $[a,b]$ ، هو أن تكون f محدودة على $[a,b]$ ، وأن يقابل كلَّ عدد موجب ε تجزئة P_ε لـ $[a,b]$ ، بحيث يكون $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

البرهان

لنفترض أولاً أن شرط النظرية محقق . عندئذ ، يقابل العددَ الموجبَ ε تجزئة P_ε لـ $[a,b]$ ، بحيث يكون

$$\overline{\int}_a^b f\,dx \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int}_a^b f\,dx + \varepsilon$$

ولما كان $\underline{\int}_a^b f\,dx \leq \overline{\int}_a^b f\,dx$ فإننا نجد أن

$$0 \leq \overline{\int}_a^b f\,dx - \underline{\int}_a^b f\,dx < \varepsilon$$

ولما كان هذا صحيحاً . أياكان العدد الموجب ε ،فإن $\overline{\int}_a^b f\,dx = \underline{\int}_a^b f\,dx$ ، أي أن f قابلة للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$.

وبالعكس . لتكن f قابلة للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$ ، وليكن ε عددا موجباً ما . إذن توجد تجزئتان P_1 , P_2 لـ $[a,b]$. بحيث يكون

$$0 \leq U(f,P_1) - \overline{\int}_a^b f\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad 0 \leq \underline{\int}_a^b f\,dx - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

فإذا كان $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$. فإن P_ε تفتيت لكلٍّ من P_1 , P_2 ، ونجد بالتالي :

$$0 < U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)$$

$$< U(f,P_1) - L(f,P_2)$$ (النظرية (٨,١٢))

$$= U(f,P_1) - \overline{\int_a^b} f\,dx + \underline{\int_a^b} f\,dx - L(f,P_2)$$ (لأن f قابلة للمكاملة)

$$< \varepsilon$$ (وفق (٥))

لذا فإن شرط النظرية محقق . ■

٨,١٨ — مثال

لنأخذ الدالة $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x) = x^3$ ، وليكن ε عدداً موجبا ما . لنفترض n عدداً صحيحاً موجباً ، بحيث $n > \frac{1}{\varepsilon}$. ولنختر التجزئة P_ε التي تقسم $[0,1]$ الى n من الاقسام المتساوية . لما كانت f متزايدة على $[0,1]$ ، فإنه أيا كان k من $< 1,n >$ نجد

$$M_k(f) = \left(\frac{k}{n}\right)^3 \quad و \quad m_k(f) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^3$$

لذا ، فإن

$$U(f,P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 . \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$L(f,P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 . \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3$$

إذن

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} [k^3 - (k-1)^3] = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

وبالتالي، فإن f تحقق شرط النظرية (٨,١٧) ، الأمر الذي يعني أن f قابلة للمكاملة على $[0,1]$.

٨,٢ — دوال قابلة للمكاملة

Some Integrable Functions

سنبين الآن ، أن ثمة أنماطا معروفة من الدوال ، تقبل المكاملة وفق ريمان . وأولى هذه الدوال هي المطردة .

٨,٢١ — نظرية

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مطردة على ساحتها ، فإنها قابلة للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$.

البرهان

لتكن f دالة متزايدة على $[a,b]$ (إذن f محدودة) ، ولتكن $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ تجزئة لـ $[a,b]$ لنفترض ε عدداً موجباً ما ، ولنختر عددا صحيحاً موجبا n بحيث $n>\frac{1}{\varepsilon}(b-a)[f(b)-f(a)]$. لنُجرِ تجزئة P_ε لـ $[a,b]$ إلى n من الأقسام المتساوية . لما كانت f متزايدة على $[a,b]$ ، فإنه أيا كان k من $<1,n>$ ، نجد

$$M_k(f)=f(x_k) \quad \text{و} \quad m_k(f)=f(x_{k-1})$$

لذا فإن

$$U(f,P_\varepsilon)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) \quad \text{و} \quad L(f,P_\varepsilon)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})$$

إذن

$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

$$=\frac{b-a}{n}[f(x_n)-f(x_0)]=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]<\varepsilon$$

وهذا يعني وفق (٨,١٧) ، أن f قابلة للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$

ويتم إثبات النظرية في حالة كون f متناقصة بصورة مماثلة . ■

٨,٢٢ — مثال

لنأخذ الدالة $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ المحددة كالتالي : إذا كان x عنصراً من $]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]$ من أجل قيمة للعدد الطبيعي n ، فإن $f(x)=\frac{1}{2^{n-1}}$. وإذا كان $x=0$ ، فإن $f(x)=0$. سنبين أن f متزايدة على $[0,1]$. ليكن x_1 , x_2 عنصرين من $[0,1]$ ، بحيث $x_1 < x_2$. فإذا كان $x_1 = 0$ ، فإن $x_2 \neq 0$ ، وبالتالي فهنالك عدد صحيح موجب n ،بحيث $x_2 \in]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]$ ، وعندها $f(x_2)=\frac{1}{2^{n-1}}$. إذن يكون :

$$f(x_1) = 0 < \frac{1}{2^{n-1}} = f(x_2)$$

لنفترض الآن أن x_1 , x_2 عنصران من $[0,1]$ مغايران للصفر ، بحيث $x_1 < x_2$. إذن ثمة عددان طبيعيان n_1 , n_2 ، بحيث $x_2 \in]\frac{1}{2^{n_2}},\frac{1}{2^{n_2-1}}]$ ، و $x_1 \in]\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_1-1}}]$. وعندئذ ، يكون $\frac{1}{2^{n_1}} < x_1 < x_2 \leqslant \frac{1}{2^{n_2-1}}$ ، وهذا يقتضي المتراجحة $n_1 > n_2 - 1$ أي $n_1 - 1 \geqslant n_2 - 1$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن $\frac{1}{2^{n_1-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n_2-1}}$ ، أو $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

وهكذا ، فإن f متزايدة على $[0,1]$ ، وبالتالي قابلة للمكاملة على $[0,1]$.

وتبين النظرية التالية ، أن صف الدوال المستمرة قابلة للمكاملة أيضاً . ورغم قصر البرهان نسبيا ، الا أنه يستند على اثنتين من أعقد النظريات الدائرة حول الدوال المستمرة .

٨,٢٣ — نظرية

إذا كانت $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على $[a,b]$ ، فإن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

البرهان

إن f محدودة على $[a,b]$ ، كما تبين النظرية (٦,٢٤) . ولما كانت f منتظمة الاستمرار على $[a,b]$ ، استناداً إلى نظرية هاين — بوريل (٦,٤١) ، فإننا نستنتج ، أنه يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ ، بحيث يكون $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ أياكان x,y من $[a,b]$ ، اللذان يحققان الشرط $|x-y| < \delta$. لنختر العدد الطبيعي n ، بحيث يكون $n > \frac{b-a}{\delta}$ ، ولنأخذ التجزئة P لـ $[a,b]$ ، التي تقسم $[a,b]$ إلى n من الأقسام المتساوية . عندئذ ، نجد أنه أياكان k من $<1,n>$ ، فإن $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ، أياكان x,y من I_k . ولكننا نجد عندئذ أنه

أياكان k من $<1,n>$ ، فإن $M_k(f)-m_k(f) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن

$$U(f,P)-L(f,P)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]$$

$$<\frac{b-a}{n}.n.\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

وهكذا ، فإن f تحقق شرطي النظرية (٨,١٧) . إذن f قابلة للمكاملة على [a,b]. ■

سنورد الآن تطبيقاً آخر للنظرية (٨,١٧) .

٨,٢٤ — نظرية

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة محدودة . فإذاكانت مجموعة نقاط انقطاع f محتواة في عدد منته من المجالات ، مجموع أطوالها أصغر من عدد موجب اختياري ε ، فإن f قابلة للمكاملة على [a,b] .

البرهان

ليكن ε عددا موجبا ما ، ولنختر تجزئة P لـ [a,b] ، بحيث تكون مجموع أطوال المجالات الجزئية الحاوية على نقاط انقطاع f أقل من ε . لما كانت محدودة على [a,b] ، فهنالك عدد موجب K ، بحيث يكون $|f(x)|<K$ أيا كان x من [a,b] . وبالتالي ، فإن مقدار ما تساهم به المجالات الجزئية الحاوية لنقاط انقطاع f في $U(f,P)-L(f,P)$ ، مقدار أصغر من $2K\varepsilon$. أما المجالات الجزئية الأخرى ، فإن f مستمرة عليها ، وبالتالي فإن f قابلة للمكاملة على كل منها (٨,٢٣) . ويترتب على هذا ، أن بامكاننا إيجاد تفتيت P' لـ P ، بحيث يكون $M_k(f)-m_k(f)<\varepsilon$ في كل من المجالات الجزئية لـ P' ، التي تكون f مستمرة عليها . لذا ، فإننا نجد من أجل f على [a,b] أن

$$U(f,P')-L(f,P)<2K\varepsilon+\varepsilon(b-a)$$

الأمر الذي يدل على أن f قابلة للمكاملة على [a,b] . ■

٨.٢٥ — مثال .

لتكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (\sin\frac{1}{x} < 0 \quad \text{عندما}) \\ 0 & (x = 0 \quad \text{عندما}) \\ +1 & (\sin\frac{1}{x} \geq 0 \quad \text{عندما}) \end{cases}$$

إن مجموعة نقاط انقطاع f هي $S = \{x : x = \frac{1}{n\pi}, n \in N\}$. ليكن ε عددا موجبا ما و N_ε عددا طبيعياً يحقق الشرط $N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon\pi}$. نلاحظ أنه إذاكان n عدداً طبيعياً ، بحيث $n \geq N_\varepsilon$ ، فإن $\frac{1}{n\pi} < \frac{\varepsilon}{2}$.وهذا يعني أن جميع نقاط انقطاع f ، باستثناء عدد منته K منها،موجودة في المجال $[0, \frac{\varepsilon}{2}[$. وإذا أضفنا إلى هذا أن ما تبقى من نقاط الانقطاع ذات العدد المنتهي،يمكن احتواؤها في عدد منته من المجالات الجزئية،مجموع أطوالها أصغر من $\frac{\varepsilon}{2}$. فإننا نستنتج أن شرط النظرية (٨.٢٤) محقق . وبالتالي فدالتنا f قابلة للمكاملة على $[0,1]$.

يترتب على هذه النظرية نتيجتان على درجة كبيرة من الأهمية من الوجهة العملية .

٨,٢٥ — نتيجة (١)

إذاكان للدالة المحدودة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ عدد منته من نقاط الانقطاع ، فإن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

٨,٢٦ — مثال

إن الدالة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ المحددة كالتالي

$$f(x) = \begin{cases} -2 & (x = a \quad \text{عندما}) \\ \sin x & (x \in]a,b[\quad \text{عندما}) \\ \sqrt{3} & (x = b \quad \text{عندما}) \end{cases}$$

قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

٨,٢٧ — نتيجة (٢)

إذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وكانت g دالة محدودة على $[a,b]$ ، بحيث أن $f(x) = g(x)$ أياكان x من $[a,b]$ باستثناء عدد منته من نقاط $[a,b]$ ، فإن

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$$

البرهان

لنأخذ الدالة $g-f:[a,b]\to\mathbb{R}$. إن $(g-f)(x)=0$ ، أياكان x من $[a,b]$ ، باستثناء عدد منته من نقاط $[a,b]$. ليكن ε عددا موجبا ما ، ولنختر تجزئة P_ε لـ $[a,b]$ ، بحيث يكون للمجالات الجزئية التي تحوي العدد المنتهي من النقاط حيث $(g-f)(x)\neq 0$ طول كلي أصغر من ε . إن $g-f$ محدودة (لأن g محدودة فرضا ، و f محدودة لكونها قابلة للمكاملة) ، أي أن ثمة عدداً موجباً M ، بحيث يكون $|(g-f)(x)|<M$ ، أياكان x من $[a,b]$. لذا فإن

$$|U(g-f,P_\varepsilon)|<2M\varepsilon \quad \text{و} \quad |L(g-f,P_\varepsilon)|<2M\varepsilon$$

يترتب على هذا أن $g-f$ دالة قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وأن $\int_a^b (g-f)\,dx=0$.

وهكذا ، فإن الدالة $g=(g-f)+f$ ، هي مجموع دالتين قابلتين للمكاملة على $[a,b]$. واستنادا إلى نظرية لاحقة (٨,٣١) ، فإن g قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما أن

$$\int_a^b g\,dx=\int_a^b (g-f)\,dx+\int_a^b f\,dx=\int_a^b f\,dx \ . \ \blacksquare$$

٨,٢٨ — مثال

لنأخذ الدالة المحدودة $g:[0,3]\to\mathbb{R}$ ، والمحددة بالدستور :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x^2-1)}{x-1} & (\text{عندما } x\neq 1)\\ -1 & (\text{عندما } x=1)\end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x)=2(x+1)$ مستمرة على $[0,1]$ ، وبالتالي فهي قابلة للمكاملة على $[0,1]$. كذلك ، فإن $f(x)=g(x)$ ، أياكان x من $[0,3]$ باستثناء النقطة $x=1$. لذا فإن

$$\int_0^3 \frac{2(x^2-1)}{x-1}dx=\int_0^3 2(x+1)\,dx$$

٨,٢٩ — نظرية

إذاكانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، فإن f قابلة للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق من $[a,b]$.

البرهان

ليكن $[c,d] \subseteq [a,b]$ و ε عدداً موجباً ما . لما كانت f قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، فإننا نستنتج من (٨,١٧) أن ثمة تجزئة $P_\varepsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$ لـ $[a,b]$ ، بحيث يكون $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. هذا، ويمكننا اعتبار c,d عنصرين من P_ε ، ذلك أن إضافة النقطتين c,d إلى P_ε يقلل من الفرق $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)$.
فإذا افترضنا أن $d = x_q$ و $c = x_p$ ، وكان

$$U^* = \sum_{k=p+1}^{q} M_k(f)\,|I_k| \quad \text{و} \quad L^* = \sum_{k=p+1}^{q} m_k(f)\,|I_k|$$

فإن U^* ، L^* هما مجموعا ريمان الأدنى والأعلى للدالة f على $[c,d]$. ولما كان $M_k(f) \geqslant m_k(f)$ أيا كان k من $<1,n>$ ، فإننا نجد أن

$$\begin{aligned} U^* - L^* &= \sum_{k=p+1}^{q} [M_k(f) - m_k(f)]\,|I_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\,|I_k| \\ &= U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon \end{aligned}$$

وهذا يعني استنادا إلى (٨,١٧) ، أن f قابلة للمكاملة على $[c,d]$. ■

٨,٣ — خواص الدوال القابلة للمكاملة

Properties of Integrable Functions

سنورد في هذا البند الخواص الرئيسية لتكامل **ريمان** ، التي تعتمد عليها كثير من حساباتنا المرتبطة بالتكاملات .

٨,٣١ — نظرية (خَطيَّة تكامل ريمان)

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين معرّفتين وقابلتين للمكاملة على $[a,b]$ ، وكان α,β عددين حقيقيين ، فإن الدالة $\alpha f+\beta g$ لا بد وان تكون قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما أن

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx+\beta \int_a^b g\, dx \qquad (*)$$

البرهان

سنعتمد في البرهان على أنه إذا كانت P أي تجزئة لـ $[a,b]$ ، فإننا نجد أياكان k من $<1,n>$ أن :

(i) $M_k(f+g) \le M_k(f)+M_k(g)$, $m_k(f+g) \ge m_k(f)+m_k(g)$

(ii) (عندما $\alpha>0$) $M_k(\alpha f) = \alpha M_k(f)$, $m_k(\alpha f) = \alpha m_k(f)$

(ii)́ (عندما $\alpha<0$) $M_k(\alpha f) = \alpha m_k(f)$, $m_k(\alpha f) = \alpha M_k(f)$

وسنترك مهمة التحقق من هذه الدساتير للقارىء .

سنقتصر على إثبات الدستور (*) في الحالة $\alpha>0,\beta>0$. نلاحظ عندئذ أن :

$$U(\alpha f+\beta g, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(\alpha f+\beta g)\,|I_k|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} [M_k(\alpha f)+M_k(\beta g)]\,|I_k| \qquad \text{((i) وفق)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\alpha M_k(f)+\beta M_k(g)]\,|I_k| \qquad \text{((ii) وفق)}$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,|I_k| +\beta \sum_{k=1}^{n} M_k(g)\,|I_k| = \alpha U(f,P)+\beta U(g,P) \qquad \text{(iii)}$$

ونجد بصورة مماثلة ، أن

$$L(\alpha f+\beta g\,,P) \geqslant \alpha L(f,P)+\beta L(g,P) \qquad \text{(iv)}$$

لما كانت f,g قابلتين للمكاملة على $[a,b]$ ، فإنه يقابل العدد الموجب تجزئتان P''_ε و P'_ε ، بحيث

$$U(g,P''_\varepsilon)-L(g,P''_\varepsilon)<\varepsilon \quad \text{و} \quad U(f,P'_\varepsilon)-L(f,P'_\varepsilon)<\varepsilon$$

فإذا رمزنا بـ $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ ، استنتجنا استنادا إلى (٨,١٢) أن

$$U(g,P_\varepsilon)-L(g,P_\varepsilon)<\varepsilon \quad \text{و} \quad U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon \qquad \text{(v)}$$

نستنتج مما سبق أن

$$\begin{aligned}
\alpha L(f,P_\varepsilon)+\beta L(g,P_\varepsilon) &\leqslant L(\alpha f+\beta g,P_\varepsilon)\leqslant U(\alpha f+\beta g,P_\varepsilon) && \text{((iv) وفق)}\\
&\leqslant U(\alpha f+\beta g,P_\varepsilon)\\
&\leqslant \alpha U(f,P_\varepsilon)+\beta U(g,P_\varepsilon) && \text{((iii) وفق)}\\
&\leqslant \alpha L(f,P_\varepsilon)+\beta L(g,P_\varepsilon)+(\alpha+\beta)\,\varepsilon && \text{((v) وفق)}
\end{aligned}$$

نستنتج من هذا المتراجحة

$$U(\alpha f+\beta g\,,P_\varepsilon)-L(\alpha f+\beta g\,,P_\varepsilon)<(\alpha+\beta)\,\varepsilon$$

التي تعني أن $\alpha f+\beta g$ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما نستنتج أيضاً أن

$$\alpha\, L\,(f,P_\varepsilon)+\beta\, L\,(g,P_\varepsilon) \leqslant \int_a^b (\alpha f+\beta g)\,dx \leqslant \alpha\, L\,(f,P_\varepsilon)+\beta\, L\,(g,P_\varepsilon)+(\alpha+\beta)\varepsilon$$

لكن لدينا كذلك

$$\alpha\, L\,(f,P_\varepsilon)+\beta\, L\,(g,P_\varepsilon) \leqslant \alpha \int_a^b f\,dx+\beta \int_a^b g\,dx \leqslant \alpha\, L\,(f,P_\varepsilon)+\beta\, L\,(g,P_\varepsilon)+(\alpha+\beta)\varepsilon$$

إذن

$$\left| \int_a^b (\alpha f+\beta g)\,dx-\left(\alpha \int_a^b f\,dx+\beta \int_a^b g\,dx\right) \right| < (\alpha+\beta)\varepsilon$$

ولما كان $(\alpha+\beta)\varepsilon$ أي عدد موجب ، فإننا نستنتج من (٢.٥٤) أن

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx+\beta \int_a^b g\,dx\,. \blacksquare$$

من الممكن تعميم هذه النظرية بالاستقراء الرياضي على أي عدد منته من الدوال القابلة للمكاملة. هذا ويترتب على النظرية السابقة النتيجتان المباشرتان التاليتان.

٨,٣٢ — نتيجة (١)

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين معرّفتين وقابليتين للمكاملة على $[a,b]$ ، فإن الدالة $f+g$ لا بد وأن تكون قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما أن

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

٨,٣٣ — نتيجة (٢)

إذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وكان α عدداً حقيقيا ما ، فإن الدالة αf قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما أن

$$\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$$

٨,٣٤ — نظرية

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين معرفتين وقابلتين للمكاملة على $[a,b]$ ، وكان $f(x) \geq g(x)$ ايا كان x من $[a,b]$ ، فإن

$$\int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx$$

البرهان

نلاحظ أولاً ، انه إذا كانت P تجزئة ما لـ $[a,b]$ ، فإنه أيا كان k من $<1,n>$ ، نجد $M_k(f) \geq M_k(g)$ ، الأمر الذي يترتب عليه ان $U(f,P) \geq U(g,P)$ ، وإذن نجد $\overline{\int_a^b} f\,dx \geq \overline{\int_a^b} g\,dx$. وبما أنه لا فرق بين تكامل ريمان وتكامل **ريمان الأعلى** للدالة القابلة للمكاملة ، فإن نظريتنا صحيحة . ■

ويمكن التحقق بسهولة ، من أنه إذا استعضنا عن الرمزين $\geq$ الواردين في (٨,٣٤) بـ $>$ ، فإن النظرية تبقى صحيحة .

٨,٣٥ — نتائج

(١) يترتب على النظرية السابقة ، أنه إذا كانت f دالة معرفة وقابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وكان $f(x) \geq 0$ أيا كان x من $[a,b]$ ، فإن $\int_a^b f\,dx \geq 0$.

(٢) ونترك للقارىء التحقق من أنه إذا كانت f دالة معرفة وقابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وكان $f(x) \geq 0$ أيا كان x من $[a,b]$ ، ووجد عدد γ من $[a,b]$ ، بحيث $f(\gamma) > 0$ ، وبحيث تكون f مستمرة في γ ، فإن $\int_a^b f\,dx > 0$.

٨,٣٦ — نظرية

إذا كانت f, φ دالتين حقيقيتين ساحتهما المشتركة $[a,b]$ ، بحيث أن كلاًّ من $f\varphi$ و φ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وأن $m \leq f(x) \leq M$ ، وأن $\varphi(x) \geq 0$ على $[a,b]$ ، فإن

$$m \int_a^b \varphi\,dx \leq \int_a^b f\varphi\,dx \leq M \int_a^b \varphi\,dx$$

البرهان :

لما كان $m\varphi(x) \leq f(x)\,\varphi(x) \leq M\varphi(x)$ أيا كان x من $[a,b]$ ، فإن صحة هذه النظرية ناتج عن النظرية (٨,٣٤) وعن النتيجة (٨,٣٣) . ■

٨,٣٧ — نتيجة

إذا كانت f دالة حقيقية معرفة وقابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وكان $m \leq f(x) \leq M$ أيا كان x من $[a,b]$ ، فإن

$$m(b-a) \leq \int_a^b f\,dx \leq M(b-a)$$

البرهان

إذا اخترنا في (٨,٣٦) الدالة φ ، بحيث $\varphi(x) = 1$ أيا كان x من $[a,b]$ ، فإننا نستنتج صحة هذه النتيجة استنادا الى (٨,١٦) . ■

قبل التقدم نحو خاصة جديدة للدوال القابلة للمكاملة ، لا بد لنا من إيراد التمهيد التالي .

٨,٣٨ — تمهيد

إذا كانت f دالة حقيقية محدودة على المجال I ، وكان

$$M = \sup\{f(x) : x \in I\} \quad \text{و} \quad m = \inf\{f(x) : x \in I\}$$

$$S = \sup\{f(x) - f(y) : x,y \in I\}$$

فإن $M - m = S$

البرهان

إذا كان x,y أي عنصرين من I ، فإن $f(y) \geqslant m$ و $f(x) \leqslant M$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن $f(x) - f(y) \leqslant M-m$. واستنادا إلى تعريف S ، نجد ان $f(x) - f(y) \leqslant S$. ليكن ε عددا موجبا ما . إذن هنالك نقطتان a,b من I بحيث $f(a) > M - \frac{\varepsilon}{2}$ ، و $f(b) < m + \frac{\varepsilon}{2}$. إذن $f(a) - f(b) > M - m - \varepsilon$ ، لكن $S \geqslant f(a) - f(b)$ ، إذن $M - m - \varepsilon < S$ ، أي أن $M - m - S < \varepsilon$. ولما كان $M - m - S$ مقدارا غير سالب (الأمر الذي ينتج من أن $f(x) - f(y) \leqslant M - m$ ، أيا كان x,y من I) ، فإننا نستنتج من (٣,٥٤) أن $M - m - S = 0$ ، أو $S = M - m$ ، وبذا يتم إثبات التمهيد . ■

٨,٣٩ — نظرية

إذا كانت f دالة حقيقية معرفة وقابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، فإن $|f|$ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما أن

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx$$

البرهان

إذا كانت P أي تجزئة لـ $[a,b]$ ، فإننا نستنتج من (٨,٣٨) أن

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) : x,y \in I_k\} \qquad (*)$$

أيا كان k من $<1,n>$. وبما أن

$$|f|(x) - |f|(y) = |f(x)| - |f(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \qquad (**)$$

أيا كان x,y من I_k ، فإننا نجد أن

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) = \sup\{|f|(x) - |f|(y) : x,y \in I_k\}$$ (وفق (٨،٣٨))

$$\le \sup\{|f(x) - f(y)| : x,y \in I_k\}$$ (وفق (٥٥))

$$= \sup\{f(x) - f(y) : x,y \in I_k\}$$

$$= M_k(f) - m_k(f)$$ (وفق (٥))

لذا ، فإن

$$U(|f|, P) - L(|f|, P) \le U(f,P) - L(f,P)$$

الأمر الذي يعني أن $|f|$ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ لكون f قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

نلاحظ الآن أن

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| = \pm \int_a^b f\,dx$$

$$= \int_a^b \pm f\,dx$$ (وفق (٨،٣٣))

$$\le \int_a^b |f|\,dx$$ (وفق (٨،٣٤) لأن $\pm f \le |f|$)

وبهذا يكتمل إثبات النظرية . ■

وتجدر بنا ملاحظة أنه رغم أن قابلية f للمكاملة تقتضي قابلية $|f|$ للمكاملة ، فإن عكس هذه الدعوى غير صحيح في الحالة العامة . لنأخذ الدالة $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور :

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{(عندما يكون } x \text{ عددا عاديا)} \\ -1 & \text{(عندما يكون } x \text{ عددا غير عادي)،} \end{cases}$$

إن $|f|(x) = 1$ ، أيا كان x من $[0,1]$ ، وبالتالي فإن $|f|$ ، قابلة للمكاملة على $[0,1]$ (لأنها ثابتة) ، في حين أن f ليست قابلة للمكاملة على $[0,1]$ ، ذلك أن

$$\overline{\int_0^1} f\,dx = 1 \neq -1 = \underline{\int_0^1} f\,dx$$

٨،٣٩١ — نظرية

إذا كانت f,g دالتين معرّفتين وقابلتين للمكاملة على $[a,b]$ ، فإن fg دالة قابلة للمكاملة على $[a,b]$

البرهان

نلاحظ أولا ، أن

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

ولما كانت كل من الدالتين $f+g$ ، و $f-g$ قابلة للمكاملة (٨,٣٢) ، فإنه يكفي لإثبات نظريتنا البرهان على أن مربع الدالة القابلة للمكاملة ، دالة قابلة للمكاملة كذلك .

وهكذا ، لنفترض f دالة قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وليكن $f \geq 0$ على $[a,b]$. فإذا كان ε عددا موجبا ، فثمة تجزئة P_ε لـ $[a,b]$ ، بحيث يكون

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

حيث M الحد الأعلى لـ f على $[a,b]$ (وهذا الحد الأعلى موجود قطعاً بسبب كون f قابلة للمكاملة ، وبالتالي محدودة) .

وبما أن $f \geq 0$ ، فمن الممكن التحقق عندئذ ، أنه اياكان k من $<1,n>$ ، فإن

$$m_k(f^2) = m_k^2(f) \quad \text{و} \quad M_k(f^2) = M_k^2(f)$$

لذا ، فإن

$$U(f^2,P_\varepsilon) - L(f^2,P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} [M_k^2(f) - m_k^2(f)]|I_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) + m_k(f)][M_k(f) - m_k(f)]|I_k|$$

$$\leq 2M[U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)] < \varepsilon$$

إذن f^2 قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

لنفترض الآن ، أن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$ (دون ان يكون بالضرورة $f \geq 0$ على $[a,b]$). فإذا رمزنا بـ m للحد الأدنى لـ f على $[a,b]$ ، (وهذا الحد الأدنى موجود قطعا بسبب كون f قابلة للمكاملة وبالتالي محدودة) ، فإن $f-m$ دالة غير سالبة ، وقابلة للمكاملة ؛ لذا فإن $(f-m)^2$ قابلة للمكاملة استنادا إلى ما سبق . ولما كان $(f-m)^2 = f^2 - 2mf + m^2$، وكانت كل من الدالتين $2mf$ و m^2 قابلتين للمكاملة كذلك ، فإن f^2 قابلة للمكاملة ، وبذا يكتمل برهان النظرية . ■

٨,٣٩٢ — نظرية

لتكن f دالة حقيقية محدودة على $[a,b]$ ، وليكن $a< c< b$. فإذا كانت f قابلة للمكاملة على كل من $[c,b]$ و $[a,c]$ ، فإن f لا بد وأن تكون قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، وعندئذ يكون

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

البرهان

ليكن ε عددا موجبا . عندئذ ، هنالك تجزئتان P_1 , P_2 لـ $[c,b]$, $[a,c]$ على الترتيب ، بحيث يكون

$$U(f,P_1) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

لنأخذ الآن التجزئة $P = P_1 \cup P_2$ لـ $[a,b]$. نلاحظ عندئذ أن

$$U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2) \text{ و } L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2)$$

لذا فإن $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ ، الأمر الذي يعني أن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

نلاحظ الآن أن

$$L(f,P) \leqslant \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx < L(f,P) + \varepsilon$$

$$L(f,P) \leqslant \int_a^b f\,dx < L(f,P) + \varepsilon$$

وبالتالي فإن

$$\left| \int_a^b f\,dx - \left(\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx \right) \right| < \varepsilon$$

الأمر الذي يترتب عليه استنادا إلى (٢,٥٤) أن

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

وهو المطلوب . ■

من الممكن استنادا إلى مبدأ الاستقراء الرياضي ، التحقق بسهولة من أنه إذا كان $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$ ، وكانت f قابلة للمكاملة على كلٍّ من المجالات $[c_{k-1}, c_k]$ ، أيا كان k من $< 1,n>$ ، فإن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما أن

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{c_1} f\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b} f\,dx$$

هذا ، ويمكن توسيع معنى التكامل ، بحيث يشمل المكاملة «في الاتجاه السالب» بإدراج التعريف التالي .

٨,٣٩٣ — تعريف

إذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، فإننا نعرّف $\int_b^a f\,dx$ بأنه $-\int_a^b f\,dx$.
كذلك ، فإذا كانت c أي نقطة من $[a,b]$ ، فإننا نعرّف $\int_c^c f\,dx = 0$.

٨,٣٩٤ — نتيجة

يترتب على هذا التعريف ، وعلى النظرية (٨،٣٩٢) ، أن

$$\int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx + \int_c^a f\,dx = 0$$

سنورد الآن نظرية تمدنا بالشروط الكافية،كي يكون تكامل نهاية متوالية من الدوال مساوياً لنهاية تكاملات دوال هذه المتوالية . وسنقدم لهذه النظرية بالتمهيد التالي .

٨,٣٩٥ — تمهيد

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين محدودتين على $[a,b]$ ، وكان $f(x) \geq g(x)$ ، أياكان x من $[a,b]$
فإن

$$\overline{\int_a^b} f\,dx \geq \overline{\int_a^b} g\,dx \quad , \quad \underline{\int_a^b} f\,dx \geq \underline{\int_a^b} g\,dx$$

البرهان

سنكتفي بإثبات المتراجحة اليسرى ، علما بأن المتراجحة اليمنى يتم إثباتها بصورة مماثلة .

لتكن P أي تجزئة لـ $[a,b]$. لما كان $f(x) \geq g(x)$ ، أياكان x من $[a,b]$ ، فإن $M_k(f) \geq M_k(g)$ ،
أياكان k من $<1,n>$ ، وبالتالي فإن $U(f,P) \geq U(g,P)$. ولما كانت P تجزئة كيفية ، فإننا نجد أن

$$\overline{\int_a^b} f\,dx \geq \overline{\int_a^b} g\,dx \;. \;\blacksquare$$

٨,٣٩٦ — نظرية :

لتكن $\{f_n\}, n\in N$ متوالية من الدوال الحقيقية ، التي كل منها معرف وقابل للمكاملة على $[a,b]$ ، ولنفترض أن هذه المتوالية تتقارب بانتظام من الدالة f على $[a,b]$. عندئذ تكون الدالة f قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، كما يكون

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, dx = \int_a^b f\, dx$$

البرهان

ليكن ε عددا موجبا ما ، إن التقارب المنتظم لـ $\{f_n\}, n\in N$ على $[a,b]$ ، يقتضي وجود عدد طبيعي N_ε ، بحيث أنه إذا كان $n \geq N_\varepsilon$ ، وكان x أي عنصر من $[a,b]$ ، فإن $\frac{-\varepsilon}{2(b-a)} < f_n(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ، أو

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

وبما أن f_n محدودة على $[a,b]$. (لأنها قابلة للمكاملة على $[a,b]$) ، فإننا نستنتج أن f محدودة على $[a,b]$.

نلاحظ بعد ذلك استنادا إلى (٨,٣٩٥) أن

$$\overline{\int_a^b} \left(f_n - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) dx < \overline{\int_a^b} f\, dx < \overline{\int_a^b} \left(f_n + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) dx$$

وبما أن f_n ، قابلة للمكاملة (فرضا) ، و $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ قابلة للمكاملة (٨,١٦) كذلك ، فإننا نجد استنادا إلى (٨,٣١) أن كلاً من $f_n + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ و $f_n - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ قابل للمكاملة على $[a,b]$ ، وبالتالي يكون

$$\int_a^b \left(f_n - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) dx < \overline{\int_a^b} f\, dx < \int_a^b \left(f_n + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) dx$$

أو

$$\int_a^b f_n\, dx - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f\, dx < \int_a^b f_n\, dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

ونجد بصورة مماثلة أن

$$\int_a^b f_n\, dx - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f\, dx < \int_a^b f_n\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\cdot)$$

الأمر الذي يترتب عليه أن

$$\overline{\int_a^b} f\,dx - \underline{\int_a^b} f\,dx < \varepsilon$$

ولما كان الطرف الأيسر غير سالب (٨.١٥) ، وكان ε عددا موجبا اختياريا ، فإن $\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$ ، الأمر الذي يعني أن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$.

وهكذا ، نجد أنه إذا كان n أي عدد طبيعي يحقق $n \geq N_\varepsilon$ ، فإن (٥) يمكن بكتابتها على الشكل

$$\int_a^b f_n\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f\,dx < \int_a^b f_n\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

الأمر الذي يترتب عليه أن

$$\left| \int_a^b f_n\,dx - \int_a^b f\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

أيا كان n الذي يحقق $n \geq N_\varepsilon$ ، وهذا يعني استنادا الى تعريف نهاية المتوالية أن

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx$$

وبذا يكتمل برهان النظرية . ■

٨,٤ — النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل

The Fundamental Theorem of Calculus

سندرس في هذا البند أهم العلاقات التي تربط بين التفاضل والتكامل ، والتي تتوّج بما يسمى « النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل » .

٨,٤١ — نظرية

إذا كانت الدالة الحقيقية **f** معرفة ، وقابلة للمكاملة على $[a,b]$ ، فإن الداله $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $F(x)=\int_a^x f\,dt$ ، مستمرة على $[a,b]$.

البرهان

نلاحظ استناداً إلى (٨،٢٧) أن f قابلة للمكاملة على $[a,x]$ أياكان x من $[a,b]$. لدينا

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_a^x f\,dt - \int_a^y f\,dt\right|$$

$$= \left|\int_x^y f\,dt\right|$$

$$\leqslant \int_x^y |f|\,dt \qquad \text{((٨،٣٩ وفق))}$$

$$\leqslant M|x-y| \qquad \text{((٨،٣٧ وفق))}$$

حيث ، $M=\sup\{|f(x)| : x\in[a,b]\}$ (العدد M موجود لأن $|f|$ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ استنادا إلى (٨،٣٩) وبالتالي فإن $|f|$ محدودة على $[a,b]$) .

يلاحظ أنه ، إذا كان ε عددا موجبا ما ، فإنه يقابل ε عدد موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ (١) بحيث **أنه** إذا كان x,y أي عنصرين من [a,b] يحققان الشرط $|x-y|<\delta$ ، فإن $|F(x)-F(y)|<\varepsilon$ ، الأمر الذي يعني أن F منتظمة الاستمرار ، وبالتالي مستمرة على [a,b] . ■

تدل هذه النظرية على أنه ، حتى في حال عدم استمرار f في عدد من نقاط [a,b] ، فإن F مستمرة على [a,b] . وتدعى الدالة F **التكامل غير المحدد** للدالة f ، أو **الدالة الأصلية** للدالة f .

٨.٤٢ — مثال

لتكن $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$ محددة بالدستور

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t\in[-2,0[\text{ عندما}) \\ 3 & (t\in[0,1] \text{ عندما}) \end{cases}$$

من الواضح انقطاع f في النقطة $x=0$. وإذا لاحظنا أن

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-2}^{x} 1\,dt = x+2 & (x\in[-2,0[\text{ عندما}) \\ \int_{-2}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{x} 3\,dt = 3x+2 & (x\in[0,1] \text{ عندما}) \end{cases}$$

فمن السهل ، رؤية استمرار F على $[-2,1]$.

٨.٤٣ — نظرية

إذا كانت f دالة معرفة ، وقابلة للمكاملة على [a,b] ، ومستمرة في النقطة x_0 من]a,b[، فإن الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $F(x)=\int_a^x f\,dt$ ، قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ، كما يكون $F'(x_0)=f(x_0)$.

---

(١) نفترض هنا $M>0$ أما لو كانت $M=0$ ، فإن $f(x)=0$ ، أياً كان x من [a,b] ، وعندها تكون $F(x)=0$ ، أياً كان x من [a,b] ، وبالتالي تكون F مستمرة على [a,b] ، لأنها دالة ثابتة

البرهان

لما كانت f مستمرة في النقطة x_0 ، فإنه يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه إذا كانت x نقطة من $[a,b]$ تحقق المتراجحة $|x-x_0|<\delta$ ، فإن $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. يترتب على هذا وفق (٨,٣٤) أن المتراجحة $|x-x_0|<\delta$ ، تقتضي المتراجحة

$$\int_{x_0}^{x} |f(x)-f(x_0)|\,dx < \varepsilon\,|x-x_0|$$

نستنتج من هذا ، أنه إذا كان $0<|x-x_0|<\delta$ ، فإن

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

الأمر الذي يعني أن

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

أي أن F قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ، كما أن $F'(x_0)=f(x_0)$. ■

هذا وتجدر بنا الإشارة الى أن التكامل غير المحدد F ، قد يكون قابلاً للاشتقاق في النقطة x_0 من $]a,b[$ ، حيث f ليست مستمرة ، ويكون $F'(x_0)\neq f(x_0)$ كما يبين المثال التالي .

٨,٤٤ — مثال

لنأخذ الدالة $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x^2-1)}{x-1} & (\text{عندما } x\neq 1)\\[2ex] -1 & (\text{عندما } x=1)\end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة f ، ليست مستمرة في النقطة $x=1$. واستناداً إلى (٨,٣٨) ، فإن

$$F(x)=\int_0^x 2(x+1)\,dx = x^2+2x$$

لذا ، فإن F قابلة للاشتقاق في النقطة $x=1$ ، بيد أن

$$F'(1)=4\neq f(1)=-1$$

٨,٤٥ — نظرية

إذا كانت f دالة معرفة وقابلة للمكاملة على [a,b] ، وكانت F دالة مستمرة على [a,b] ، وقابلة للاشتقاق على]a,b[، وكان $F'(x)=f(x)$ أيا كان x من]a,b[، فإن

$$\int_a^b f\,dx = F(b)-F(a)$$

البرهان

إذا كانت P أي تجزئة لـ [a,b] ، فإن

$$F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^{n} [F(x_k)-F(x_{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(t_k)(x_k - x_{k-1})$$ (وفق (٧,٢٣) ، حيث $t_k \in]x_{k-1}, x_k[$)

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$ (فرضا)

لكن

$$L(f,P) \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \leq U(f,P)$$

إذن

$$L(f,P) \leq F(b)-F(a) \leq U(f,P)$$

ولما كانت f قابلة للمكاملة على [a,b] ، فإنه يقابل العدد الموجب الاختياري ε تجزئة P_ε لـ [a,b] ، بحيث

$$U(f,P_\varepsilon) < \int_a^b f\,dx + \varepsilon \quad و \quad L(f,P_\varepsilon) > \int_a^b f\,dx - \varepsilon$$

ويترتب على هذا المتراجحة التالية

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f\,dx \right| < \varepsilon$$

ولما كان العدد الموجب ε اختيارياً،فإننا نجد استناداً إلى (٢,٥٤) ، أن $\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$ ، وهو المطلوب . ■

ان هذه النظرية بالغة الاهمية عند حساب التكاملات .

٨,٤٦ — مثال :

ان الدالة $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد طبيعي ، قابلة للمكاملة على $[a,b]$ (لأنها مستمرة على $[a,b]$) . كذلك ، فإن الدالة $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ ، والمحددة بالدستور $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ، مستمرة على $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، كما أن $F'(x) = f(x)$ ، أيا كان x من $]a,b[$.

لذا ، فإن

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

٨,٥ ــ تكاملات كوشي – ريمان

Cauchy – Riemann Integrals

لقد قيدنا نظرية تكاملات ريمان،التي درسناها في البنود السابقة من هذا الفصل،بدوال محدودة معرفة على مجالات مغلقة ومحدودة . وسنوسع في هذا البند مفهوم التكامل ، بحيث يشمل دوال ليست محدودة بالضرورة على مجالات،ليست بالضرورة مغلقة أو محدودة . بيد أنه من الممكن تغطية هذه الحالات جميعا بالتركيز على نوع المجال الذي يشكل ساحة الدالة .

٨,٥١ ــ تعريف :

لتكن $f:[a,b[\to \mathbb{R}$ دالة ، بحيث تكون الدالة $f|[a,x]$ قابلة للمكاملة وفق ريمان ، أيا كان x من $[a,b[$. لنحدد الدالة $F:[a,b[\to \mathbb{R}$ بالدستور

$$F(x) = \int_a^x f\,dt$$

فإذا كان $b = \infty$ ، وكانت النهاية $\lim_{x\to\infty} F(x)$ موجودة ، فإننا نقول عندئذ إن **تكامل كوشي ــ ريمان من النوع الأول للدالة** f **موجود** (او **متقارب**) على $[a,\infty[$ ، ونرمز لهذا التكامل عندئذ بالرمز $\int_a^\infty f\,dt$ ، أي أن $\int_a^\infty f\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f\,dt$. أما إذا كان $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f\,dt = \pm\infty$ ، فإننا نقول إن تكامل كوشي-ريمان **متباعد إيجابياً** (في حالة $+\infty$). أو **متباعد سلبياً** (في حالة $-\infty$) .

وإذا كان $b \in \mathbb{R}$ ، وكانت النهاية $\lim_{x\to b-} F(x)$ موجودة ، فإننا نقول عندئذ إن **تكامل كوشي ــ ريمان من النوع الثاني للدالة f** موجود (او **متقارب**) على $[a,b[$. ونرمز لهذا التكامل عندئذ بالرمز $\int_a^{b-} f\,dt$ ، أي أن

$$\int_a^{b-} f\,dt = \lim_{x\to b-} \int_a^x f\,dt$$

أما إذا كان $\lim_{x\to b-} \int_a^x f\,dt = \pm\infty$ ، فإننا نقول إن تكامل كوشي ــ ريمان متباعد إيجابيا (في حالة $+\infty$) ، أو متباعد سلبيا (في حالة $-\infty$) .

هذا ، ومن الممكن إيراد تعاريف مماثلة للدالة $f:]b,a]\to\mathbb{R}$ في الحالتين $b=-\infty$ و $b\in\mathbb{R}$.

٨,٥٢ — أمثلة

(١) لنأخذ الدالة $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ ، المحددة بالدستور $f(t)=e^{-t}$. إن f مستمرة وبالتالي قابلة للمكاملة على $[0,x]$ ، أياكان x من $]0,\infty[$. نلاحظ أن

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt=\lim_{x\to\infty}(-e^{-x}+1)=1$$

وبالتالي ، فإن تكامل كوشي ـ ريمان من النوع الأول للدالة e^{-t} ، موجود على $[0,\infty[$ ، كما ان $\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt=1$.

(٢) لنأخذ الدالة $f:[0,1[\to\mathbb{R}$ ، المحددة بالدستور $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. إن f مستمرة وبالتالي قابلة للمكاملة على $[0,x]$ ، أياكان x من $]0,1[$ نلاحظ أن

$$\lim_{x\to1^-}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\lim_{x\to1^-}(\operatorname{Arcsin}x-\operatorname{Arcsin}0)=\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي ، فإن تكامل كوشي — ريمان من النوع الثاني للدالة $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ، موجود على $[0,1[$ ، كما أن $\int_0^{1^-}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}$.

(٣) لنأخذ الدالة $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(t)=\frac{1}{t}$. إن f مستمرة ، وبالتالي قابلة للمكاملة على $[1,x]$ ، أياكان x من $]1,\infty[$. نلاحظ هنا أن

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{dt}{t}=\lim_{x\to\infty}(\log x-\log 1)=\infty\ .$$

وبالتالي ، فإن تكامل كوشي — ريمان من النوع الأول للدالة $\frac{1}{t}$ على $[1,\infty[$ ، متباعد إيجابيا ، أي أن

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{t}=\infty$$

٨,٥٣ — نظرية

إذا كانت الدالتان f,g المعرفتان على $[a,\infty[$ ، قابلتين للمكاملة (وفق ريمان) على كل مجال مغلق $[a,x]$ ، حيث $x \in [a,\infty[$ ، وكان $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ، أيا كان x من $[a,\infty[$ ، فإن :

(١) إذا كان التكامل $\int_a^\infty g\,dt$ متقاربا ، فإن $\int_a^\infty f\,dt$ متقارب كذلك .

(٢) إذا كان التكامل $\int_a^\infty f\,dt$ متباعداً ، فإن $\int_a^\infty g\,dt$ متباعد كذلك .

البرهان

لنأخذ الدالة $h:[a,\infty[\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $h(x)=\int_a^x f\,dt$. لما كان $f(x)\geqslant 0$ ، أيا كان x من $[a,\infty[$ ، فإن h دالة متزايدة على $[a,\infty[$. وإذا لاحظنا كذلك . أن

$$0\leqslant\int_a^x f\,dt\leqslant\int_a^x g\,dt$$

فإننا نستنتج أن h محدودة من الأعلى بالتكامل (الموجود فرضا) $\int_a^x g\,dt$. ومن السهل ، التحقق بعد هذا أن للدالة المتزايدة والمحدودة $\int_a^x f\,dt$ نهاية عندما $x\to\infty$ هي $\int_a^\infty f\,dt$. ومن الممكن إثبات (٢) بصورة مماثلة . ■

٨,٥٤ — مثال

لنأخذ الدالة $t\to\frac{|\sin t|}{1+t^2}$ ، التي ساحتها $[0,\infty[$. نلاحظ أنه ، لما كان $0\leqslant\frac{|\sin t|}{1+t^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$ ، أيا كان t من $[0,\infty[$ ، وكان التكامل $\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}$ موجوداً (ويساوي $\frac{\pi}{2}$) ، فإن $\int_0^\infty\frac{|\sin t|}{1+t^2}dt$ موجود .

هذا ، ونترك للقارىء التحقق بصورة مماثلة لما فعلناه في (٨,٥٣) من صحة النظرية التالية .

٨,٥٥ — نظرية

إذا كانت الدالتان f,g المعرّفتان على $[a,b[$ ، قابلتين للمكاملة على كل مجال مغلق $[a,x]$ ، حيث $x\in[a,b[$ ، وكان $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ أيا كان x من $[a,b[$ ، فإن :

(١) إذا كان التكامل $\int_a^{b^-} g\,dt$ متقارباً ، فإن التكامل $\int_a^{b^-} f\,dt$ متقارب كذلك .

(٢) إذا كان التكامل $\int_a^{b^-} f\,dt$ متباعدا ، فإن التكامل $\int_a^{b^-} f\,dt$ متباعد كذلك .

تمارين

تكامل ريمان

(٨—١)

لتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ محددة بالدستور

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{(عندما يكون } x \text{ عدداً عادياً)}\\ 0 & \text{(عندما يكون } x \text{ عدداً غير عادي)}\end{cases}$$

ولتكن P تجزئة ما لـ $[0,1]$. بين أن

$$U(f,P)=\overline{\int_0^1} f\,dx \qquad \text{و} \qquad L(f,P)=\underline{\int_0^1} f\,dx$$

هل f قابلة للمكاملة ، **وفق ريمان** على $[0,1]$ ؟

(٨—٢)

لتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور $f(x)=x$.

(١) بين أنه إذا كانت P_n تجزئة للمجال $[0,1]$ ، تقسمه إلى n من الأقسام المتساوية ، فإن

$$U(f,P_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \qquad \text{و} \qquad L(f,P)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

(٢) تحقق من أنه أياً كانت التجزئة P لـ $[0,1]$ ، فإن

$$L(f,P)<\frac{1}{2}<U(f,P) .$$

(٣) برهن على أن $\int_0^1 f\,dx=\frac{1}{2}$.

(٨—٣)

لتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور $f(x)=x^2$.

(١) بين أنه إذا كانت P_n تجزئة للمجال $[0,1]$ تقسمه إلى n من الأقسام المتساوية . فإن

$$U(f,P_n)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}.$$

ثم أوجد عبارة $L(f,P_n)$.

(٢) تحقق بأنه أياً كانت التجزئة P لـ [0,1] ، فإن

$$L(f.P) < \frac{1}{3} < U(f,P)$$

(٣) برهن على أن $\int_0^1 f\,dx = \frac{1}{3}$.

(٨ــ٤)

لتكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{(عندما يكون } x = \frac{p}{q} \text{ (} p,q \text{ ليس لهما عامل مشترك))} \\ 0 & \text{(عندما يكون } x \text{ عدداً غير عادي)} \end{cases}$$

برهن أن f قابلة للمكاملة على [0,1] وأن $\int_0^1 f\,dx = 0$.

(**إرشاد** . نأخذ التجزئة P_n ($n \geq 2$) للمجال [0,1] ، حاوية لجميع الأعداد العادية $\frac{p}{q}$ ، المنتمية إلى [0,1] ، بحيث $p < q < n$. فإن كان x_{k-1}, x_k عنصرين متعاقبين من P_n ، فإن $M_k(f) < \frac{1}{n}$) .

(٨ــ٥)

برهن على أنه إذا كانت f دالة درجية (٦،٤٣) على [a,b] ، فإن f قابلة للمكاملة على [a,b] . أوجد قيمة التكامل $\int_a^b f\,dx$.

(٨ــ٦)

إذا كانت الدالة f قابلة للمكاملة على [a,b] ، فأثبت أن الدالة $g:[a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ ، حيث c > 0، المحددة بالدستور $g(x) = f(x-c)$ ، قابلة للمكاملة، وأن $\int_{a+c}^{b+c} g\,dx = \int_a^b f\,dx$ (**إرشاد** . نأخذ التجزئة $P' = \{x_o + c, \ldots, x_n + c\}$ لـ [a+c, b+c] حيث $\{x_o, \ldots, x_n\}$ تجزئة لـ [a,b]).

(٨ــ٧)

لتكن f دالة حقيقية قابلة للمكاملة وفق ريمان على [a,b] ، وليكن

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

بين أن كلاً من f^+ و f^- قابلة للمكاملة وفق ريمان على [a,b] ، وأن

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b f^+\,dx - \int_a^b f^-\,dx$$

(**إرشاد** : بين أن $f = f^+ - f^-, \ |f| = f^+ + f^-$.)

الدوال القابلة للمكاملة وخواصها

(٨—٨)

برهن أنه إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، فيوجد عدد c من $[a,b]$ ، بحيث يكون

$$\int_a^b f\,dx = (b-a)\,f(c)$$

(**إرشاد** : استخدم النظرية (٥،١٩٦) ، التي يترتب عليها أن خيال أي مجال وفق دالة مستمرة هو مجال) .

(٩—٨)

إذا كانت f دالة موجبة ومستمرة ، ومتزايدة تماماً على $[a,b]$ ، حيث $0<a<b$ ، فأثبت أن

$$\int_a^b f\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}dx = b\,f(b) - a\,f(a)$$

احسب بعد ذلك التكاملين التاليين :

$$\int_a^b x^{\frac{1}{3}}\,dx \qquad (0<a<b \text{ حيث})$$

$$\int_0^1 \text{Arc}\sin x\,dx$$

(١٠—٨)

حدد من بين الدوال التالية على $[0,1]$ ما كان منها قابلاً للمكاملة على $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x & (\text{عندما يكون } x \text{ عادياً}) \\ 1-x & (\text{عندما يكون } x \text{ غير عادي}) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \{\frac{1}{n} : n \in N\} \text{ عندما}) \\ 1 & (x \notin \{\frac{1}{n} : n \in N\} \text{ عندما}) \end{cases}$$

(١١—٨))

برهن أنه إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على $[a,b]$ ، وكانت φ دالة غير سالبة على $[a,b]$ ، وقابلة للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$ ، فيوجد عدد c من $[a,b]$ ، بحيث يكون

$$\int_a^b f\varphi\,dx = f(c)\int_a^b \varphi\,dx$$

(٨ — ١٢)

استخدم التمرينين (٨–٢) ، و(٨–٣) ، والخواص الأساسية للدوال القابلة للمكاملة الواردة في البند (٨,٣) ، لإيجاد قيمتي التكاملين:

$$\int_0^1 (x+2)\,dx \quad \text{و} \quad \int_0^1 (2x^2+3x+2)\,dx$$

(٨ — ١٣)

برهن على أن

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx < 1$$

(**إرشاد**. بين أنه ، إذا كان $0 < x < 1$ ، فإن

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} < \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} < x^2 \text{ .)}$$

(٨ — ١٤)

برهن على صحة النتيجة (٢) من (٨,٣٥) . ثم استخدم هذه النتيجة لإثبات ما يلي : إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين معرفتين وقابلتين للمكاملة على $[a,b]$ ، وكان $f(x) \geq g(x)$ أياً كان x من $[a,b]$ ، ووجد عدد γ من $[a,b]$ ، بحيث $f(\gamma) > g(\gamma)$ ، وبحيث تكون f,g مستمرتين في γ ، فإن $\int_a^b f\,dx > \int_a^b g\,dx$

(٨ — ١٥)

إذا كانت $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة وغير سالبة على $[a,b]$ ، وكان $\int_a^b f\,dx = 0$ ، فإن $f(x) = 0$ ، أياً كان x من $[a,b]$.

(٨ — ١٦)

إذا كانت f دالة قابلة للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$ ، وكانت P_n تجزئة لـ $[a,b]$ إلى $n+1$ من الأقسام المتساوية ، فأثبت أن كلاً من المتواليتين $\{U(f,P_n)\}$ ، و $\{L(f,P_n)\}$ تتقارب من $\int_a^b f\,dx$.

(٨ — ١٧)

لتكن $f:[0,a] \to \mathbb{R}$ (حيث $a > 2$) دالة محددة بالدستور :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (\text{عندما } x \neq 2) \\ 0 & (\text{عندما } x = 2) \end{cases}$$

برهن أن f دالة قابلة للمكاملة على $[0,a]$ ، وأن

$$\int_0^a f\,dx = \int_0^a (x+2)\,dx$$

النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل

(٨—١٨)

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ، وكان $f(x)>0$ ، أياً كان x من $[a,b]$ ، فإن الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $f(x)=\int_a^x f\,dt$ متزايدة تماماً على $[a,b]$.

(٨—١٩)

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ، فثمة عدد γ من $]a,b[$ ، بحيث

$$\int_a^b f\,dx = f(\gamma)(b-a)$$

إن هذه النتيجة قد لا تصح إذا كانت f قابلة للمكاملة . دون أن تكون مستمرة على $[a,b]$. (**إرشاد**. من الممكن استخدام النظرية (٨،٤٣) والنظرية (٦،١٢) ، أو يمكننا تطبيق نظرية القيمة الوسطى على الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور $F(x)=\int_a^x f\,dt$. وتسمى هذه النتيجة أحياناً ، نظرية القيمة الوسطى الأولى في الحساب التكاملي) .

(٨—٢٠)

إذا كانت f,g دالتين حقيقيتين مستمرتين على $[a,b]$ ، وكانت F,G دالتين حقيقيتين على $[a,b]$ معرفتين على النحو التالي

$$F(x)=\int_a^x f\,dt \quad \text{و} \quad G(x)=\int_a^x g\,dt$$

فإن

$$\int_a^b Fg\,dx = \int_a^b fG\,dx = F(b)G(b)-F(a)G(a)$$

(**إرشاد** . لاحظ ، أن $(FG)'=F'G+FG'$ ، ثم استعمل النظريتين (٨،٤١) ، و(٨،٤٣) .)

(٨—٢١)

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولنعرف دالة F على $\mathbb{R}$ بالدستور $F(x)=\int_0^{g(x)} t^2\,dt$

برهن أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وأن $F'(x)=g^2(x)g'(x)$ أياً كان x من $\mathbb{R}$. وإذا كانت h دالة قابلة للاشتقاق أيضاً على $\mathbb{R}$ ، وكانت G دالة على $\mathbb{R}$ محددة بالدستور

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 \, dt$$

فأثبت أن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ثم حدد الدالة المشتقة G' على $\mathbb{R}$.

(٨ — ٢٢)

إذا كانت $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$F(x) = \int_a^x [1 + \sin(\sin t)] dt$$

فبرهن أن الدالة العكسية F^{-1} موجودة وقابلة للاشتقاق على $F(]-1,1[)$. عين القيمة العددية للمقدار $(F^{-1})'(0)$

تكاملات كوشي — ريمان

(٨ — ٢٣)

برهن أن تكامل كوشي — ريمان $\int_1^\infty \frac{dt}{t^p}$ متقارب إذا كان $p > 1$ ، ومتباعد إذا كان $p < 1$.

(٨ — ٢٤)

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور $f(t) = e^{-k|t|}$ ، حيث k عدد حقيقي موجب . برهن على تقارب تكامل كوشي — ريمان $\int_{-\infty}^{+\infty} f \, dt$.

(٨ — ٢٥)

برهن على وجود التكامل $\int_1^\infty e^{-t^2} dt$.

(**إرشاد.** لاحظ أن $0 < e^{-t^2} < e^{-t}$ ، أياً كان t من $]1,\infty[$ ، وبرهن كما فعلنا في التمرين (١) من (٨,٥٢) ، أن التكامل $\int_1^\infty e^{-t} dt$ متقارب .)

(٨ — ٢٦)

لتكن $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور $f(t) = \frac{1}{t^p}$ ، حيث $p \in \mathbb{R}$. برهن أن تكامل كوشي — ريمان $\int_{0^+}^1 \frac{dt}{t^p}$ متقارب عندما $p < 1$ ، ومتباعد عندما $p > 1$.

(٨ — ٢٧)

أدرس تقارب أو تباعد كل من تكاملات كوشي — ريمان التالية :

(i) $\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ (ii) $\int_0^{1-} \frac{dt}{(t-1)^2}$

(iii) $\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}\, dt$ (iv) $\int_{0+}^{1} \frac{\log t}{\sqrt{t}}\, dt$

(v) $\int_{0+}^{1-} \frac{\log t}{1-t}\, dt$ (vi) $\int_{0+}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\, dt$

(٨ — ٢٨)

التقارب المطلق والتقارب الشرطي . نقول عن تكامل كوشي — ريمان للدالة f إنه متقارب مطلقاً،إذا كان تكامل كوشي — ريمان للدالة $|f|$ متقارباً . ونقول عن تكامل كوشي — ريمان للدالة f إنه متقارب شرطياً ، إذا كان تكامل كوشي — ريمان للدالة f ، متقارباً،في حين يكون تكامل كوشي — ريمان للدالة $|f|$ متباعداً.

(١) برهن أن تكامل كوشي — ريمان $\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\frac{1}{t}\, dt$ متقارب مطلقاً .

(٢) برهن أن تكامل كوشي — ريمان $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ متقارب شرطياً .

ثبت المصطلحات

نورد فيما يلي جدولاً للمصطلحات المستعملة في الكتاب، مرتبة وفق الحروف الأبجدية العربية، مع مقابل كل منها باللغة الانجليزية .

أ

اجتماع	Union
استمرار	Continuity
– منتظم	uniform —
أسلوب	Method
– جدولي	tabular —
– الخاصة المحددة	defining property —

ت

تباعد	Divergence
تجزئة	Partition
ترتيب	Order
– جزئي	partial —
– كلي	total —
تغطية	Covering
– جزئية	subcovering
تفتيت	Refinement
تقارب	Convergence
– شرطي	conditional —
– مطلق	absolute —
– منتظم	uniform —
– نقطي	pointwise —
تقاطع	Intersection
تطبيق توبولوجي	Topological mapping
تقليص	Contraction
تكافؤ	Equivalence
صف –	— class
علاقة –	— relation
تكامل	Integral
– ريمان الأدنى	lower Riemann —
– ريمان الأعلى	upper Riemann —
– غير محدد	indefinite —
– متقارب	convergent —
– متباعد (إيجابياً)	(positively) diverging —
– متباعد (سلبياً)	(negatively) diverging —
– محدّد	definite —
– من النوع الأول	— of the first kind
– من النوع الثاني	— of the second kind
تمهيد	Lemma
تناظر	Symmetry

ث

ثلاثي مرتب	Ordered triple

ج

جداء أو حاصل ضرب	Product
– ديكارتي	cartesian —
– مجموعات	— of sets
جماعة	Family
جوار	Neighbourhood
جيب	Sine
– زائدي	hyperbolic —
جيب تمام	Cosine
– – زائدي	hyperbolic —

ح

حد	Bound
الـ – الأدنى	infimum
الـ – الأعلى	supremum
حقل	Field
– تام	complete —
– مرتب	ordered —
حلقه	Ring
– واحدية	unitary —

خ

خاصة	Property
– شاملة	global —
– محدّدة	defining —
موضعية	local —
خيال	Image
عكسي	inverse —
مباشر	direct —

د

داخل مجموعة	Interior of a set
دالة	Function
– ابتدائية	elementary —
– أكبر عدد صحيح	greatest integer —
– أسية	exponential —
– تربيعية	quadratic —
– تسعى إلى	— tends to
– تقليص	contraction —
– ثابتة	constant —
– ثنائية الاستمرار	bicontinuous —
– الجيب	sine —
– الجيب الزائدي	hyperbolic sine —
– جيب التمام	cosine —
– جيب التمام الزائدي	hyperbolic cosine —
– حقيقيه	real —
– حقيقيه لمتغير حقيقي	real — of a real variable
– خاليه	empty —
– درجيه	step —
– دورية	periodic —
– زائدية	hyperbolic —
– زوجية	even —
– صفرية	zero —
– عكسية	inverse —
– غامرة أو على	surjective or onto —
– فردية	odd —
– قابلة للاشتقاق	differentiable —
– قابلة للاشتقاق n مرّة	n-times differentiable —
– قابلة للمكاملة	integrable —
– قوة	power —
– لمتغيرين	— of two variables
– لوغاريتمية	logarithmic —
– متباينة أو واحد إلى واحد	injective or 1-1 —
– متزايدة (تماما)	(strictly) increasing —
– متناقصة (تماما)	(strictly) decreasing —
– محدودة	bounded —
– محدوده من الأدنى	bounded below —
– محدودة من الأعلى	bounded above —
– مسافة	distance —
– مستمرة	continuous —
– مطابقة	identity —
– مطردة	monotone —
– منتظمة الاستمرار	uniformly continuous —
– نصف مستمرة من الأدنى	lower semicontinuous —
– نصف مستمرة من الأعلى	upper semicontinuous —
– النهاية	limit —

دستور	Law
– تبديلي أو آبلي	commutative or abelian —
– تجميعي أو قابل للدمج	associative —
– توزيعي	distributive —
– توزيعي من اليسار	left distributive —
– توزيعي من اليمين	right distributive —
دليل	Index
دور	Period

ز

زمرة	Group
– تبديلة أو آبلية	commutative or abelian —
زوج أو ثنائية	Pair
– مرتب	ordered —

س

ساحة	Domain

ش

شبكة	Net

ص

صف	Class
– تكافؤ	equivalence —
– دوال	— of functions

ط

طرف مجال	End-point of an interval

ع

عدد	Number
– حقيقي	real —
– صحيح	integer, whole —
– طبيعي	positive integer, natural —
– عادي	rational —
– غير عادي	irrational —
علاقة	Relation
– ترتيب	order —
– ترتيب جزئي	partial order —
– ترتيب كلي	total order —
– تكافؤ	equivalence —
– لا متناظرة	asymmetric —
– متعدية	transitive —
– متناظرة	symmetric —
– منعكسة	reflexive —
عناصر قابلة للمقارنة	Comparable elements
عملية	Operation
– تبديلية أو آبلية	commutative or abelian —
– تجميعية أو قابلة للدمج	associative —
– توزيعية	distributive —
– توزيعية من اليسار	left distributive —
– توزيعية من اليمين	right distributive —
– ثنائية	binary —
عنصر	Element
– أصغر	least —
– أكبر	greatest —
– حادّ من الأدنى	lower bound
– حادّ من الأعلى	upper bound
– سابق (تماما)	(strictly) preceeding —
– محايد	identity —
– لاحق تماما	(strictly) succeeding —

غ

غطاء	Cover
– جزئي	subcover

ف

فضاء	Space
– إقليدي (ذو أبعاد n)	euclidean — (of n dimensions)

— تافه	trivial —
— تام	complete —
— جزئي	subspace
— حقيقي مألوف	usual real —
— خطي	linear —
— متراص أو ملتحم	compact —
— متراص بالتوالي	sequentially compact —
— متري	metric —
— متصل أو مترابط	connected —
— منظم	normed —
— منقطع	discrete —
— النقاط المنعزلة	— of isolated points

ق

قابلية العد	Countability
قاعدة	Rule
قيمة	Value
— دالة في نقطة	the — of a function at a point
— متوسطة	intermediate —
— وسطى	mean —

ك

كثير حدود	Polynomial
— تايلور	Taylor —
كرة	Ball
— محذوفة المركز مركزها x	deleted neighbourhood of x
— مغلقة	closed —
— مفتوحة	open —

ل

لصاقة	Closure

م

مبدأ الاستقراء الرياضي	Principle of mathematical induction
متريك	Metric
— تافه	trivial —
— الفضاء الجزئي	subspace —
— القيمة المطلقة	absolute value —
— مألوف	usual —
— منتظم	uniform —
— منقطع	discrete —
— نسبي	relative —
متممة مجموعة	Complement of a set
متوالية	Sequence
— حقيقية	real —
— جزئية	subsequence
— متباعدة	divergent —
— متزايدة (تماما)	(strictly) increasing —
— متقاربة	convergent —
— متناقصة (تماما)	(strictly) decreasing —
— مطّردة	monotone —
— مطّردة بعد عدة حدود	eventually monotone —
مجال	Interval
— جزئي	subinterval
— محدّود	bounded —
— مفتوح	open —
— مغلق	closed —
— منحط	degenerate —
— نصف مغلق من اليسار	left - half - closed —
— نصف مفتوح من اليمين	right - half - open —
مجالات متداخلة	Nested intervals
مجموع أدنى (أعلى)	Lower (upper) sum
مجموعات ذات أدلة	Indexed sets
مجموعة	Set
— أجزاء	— of subsets
— أدلة	indexing —
— استقرائية	inductive —
— الأعداد الحقيقية	— of real numbers
— الأعداد الصحيحة	— of integers

— الأعداد الطبيعية	— of natural numbers
— الأعداد العادية	— of rational numbers
— الأعداد غير العادية	— of irrational numbers
— تعريف	— of definition
— جزئية (تماما)	(proper) subset
— حاصل القسمة	quotient —
— خالية	empty or null —
— ديكارتية	cartesian —
— قابلة للعد	countable —
— قابلة للعد اللامنتهي	countably infinite —
— قوة	power —

ن

نظرية	Theorem
— الاستمرار المنتظم	uniform continuity —
— أرخميدس	Archimedes' —
— الترتيب الجيد	well-ordering —
— التقارب المنتظم	uniform convergence —
— ديديكند	Dedikind's —
— ديني	Dini's —
— القيمة الأكبر والقيمة الأصغر	maximum and minimum value —
— القيمة المتوسطة	intermediate value —
— القيمة الوسطى	mean value —
— النقطة الثابتة	fixed point —
نظيم	Norm
— منتظم	uniform —
نقطة	Point
— ثابتة	fixed —
— حدية	limit —
— داخلية	interior —
— مثالية	ideal —
— ملاصقة	cluster —
نهاية	Limit
— دالة	— of a function

— دنيا	—inferior
— عليا	— superior
— متوالية	— of a sequence
— يسرى	left —
— يمنى	right —
— كثيفة	dense —
— لا منتهية	infinite —
— محدودة من الأدنى (من الأعلى)	bounded below (above) —
— مرتبة جزئياً (كليا)	partially (totally) ordered —
— مشتقة	derived —
— مغلقة	closed —
— مفتوحة	open —
— منتهية	finite —
— وصول	— of arrival

مدى	Range
مرتّبة n	Ordered n-tuple
مرشحة	Filter
مركبة دالتين	Composite function
مسلمة التمام أو مسلمة الحد الأعلى	Completenes or Supremum axiom
مشتق	Derivative
معيار	Criterion
مفاضلة	Differentiation
مقصور دالة	Restriction of a function
مقلوب	Inverse
مكاملة	Integration
ممدد دالة	Extension of a function
موسّع الأعداد الحقيقية	Extended real numbers



مسرد الرموز

نورد فيما يلي قائمة بالرموز المستخدمة في هذا الكتاب مع ما يعنيه كل منها باللغة العربية

المعنى	الرمز
المجموعة $\{1, \ldots, n\}$	$< 1 , n >$
جماعة من المجموعات مجموعة أدلّتها I	$\{ A_i \} , i \in I$
المجموعة A تكافىء المجموعة B	$A \approx B$
المجموعة A محتواة (تماما) في B	$A \subseteq B (A \subset B)$
إجتماع المجموعتين A,B	$A \cup B$
تقاطع المجموعتين A,B	$A \cap B$
حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A	$A - B$
الفرق التناظري لـ A,B	$A \Delta B$
a عنصر ينتمي الى A	$a \in A$
a يسبق (تماما) b	$a \preccurlyeq b (a \prec b)$
A مجموعة مرتبة بعلاقة الترتيب $\preccurlyeq$	$(A , \preccurlyeq)$
مجالات من R	$[a , b] ,] a , b [, [a , b [, \ldots$
الدالة العكسية لمقصور cos على $[0,\pi]$	Arc cos
الدالة العكسية لمقصور sin على $[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}]$	Arc sin

الدالة العكسية لمقصور ch على $[0,\infty[$	Arg ch
الدالة العكسية لـ sh على R	arg sh
المجموعة A المزودة بمترك الفضاء الجزئي من (X,D)	(A, D_A)
كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها ε	$B(x_0, \varepsilon)$
مجموعة الدوال الحقيقية المحدودة على X	$B(X)$
مجموعة الدوال الحقيقية المستمرة على X	$C(X)$
مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق n مرة على مجال مفتوح	C^n
مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق من أية مرتبة على مجال مفتوح	C^∞
جيب التمام الزائدي	ch
المجموعة المشتقة لـ A	$D(A)$
المسافة بين a,b في الفضاء (X,D)	$D(a, b)$
المسافة بين النقطة a والمجموعة B في (X,D)	$D(a, B)$
المسافة بين المجموعتين A,B في (X,D)	$D(A, B)$
الدالة المشتقة لـ f	f' أو $\frac{df}{dx}$ أو Df
مشتق الدالة f في النقطة x_0	$f'(x_0)$ أو $\frac{df(x_0)}{dx}$ أو $(Df)(x_0)$
ساحة أو مجموعة تعريف الدالة f	$\mathcal{D}(f)$
خارج المجموعة A	Ext (A)
صف تكافؤ a	E_a
الدالة الأسية	exp
f دالة من (X,D) الى (Y,D')	$f : (X, D) \to (Y, D')$
f دالة حقيقية على (X,D)	$f : (X, D) \to \mathbb{R}$
f دالة حقيقية للمتغير الحقيقي	$f : S \to \mathbb{R}, (S \subseteq \mathbb{R})$
مقصور f على A	$f \vert A$
الخيال المباشر لـ A وفق f	$f(A)$

الخيال العكسي لـ B وفق f	$f^{-1}(B)$
مجموع الدالتين f,g	$f+g$
حاصل ضرب الدالتين f,g	fg
حاصل قسمة الدالتين f,g	$\frac{f}{g}$
مركبة الدالتين f,g	$g \circ f$
تكامل ريمان الأعلى (الأدنى) على [a,b]	$\overline{\int_a^b} f\,dx \; (\underline{\int_a^b} f\,dx)$
تكاملات كوشي - ريمان ...	$\int_{a+}^{b} f\,dx \; ; \int_a^{\infty} f\,dx \; ; \int_a^{b-} f\,dx \; ; \int_{-\infty}^{b} f\,dx \, , \int_{-\infty}^{+\infty} f\,dx \; ; \ldots$
المجموعة الخالية	$\emptyset$
داخل المجموعة A	$Int(A)$
دالة المطابقة على X	I_X
الحد الأدنى	inf
مجموع ريمان الأدنى للدالة f بالنسبة للتجزئة P	$L(f, P)$
اللوغاريتم الطبيعي	log
النهاية اليمنى (اليسرى) لـ f في x_o	$\lim_{x \to x_o +} f(x) \; (\lim_{x \to x_o -} f(x))$
النهاية العليا (الدنيا) لـ f في x_o	$\lim_{x \to x_o} \sup f(x) \; (\lim_{x \to x_o} \inf f(x))$
x هي نهاية المتوالية $\{x_n\}, n \in N$	$\lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad x_n \to x$
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
كرة مفتوحة مركزها x_o ونصف قطرها ε	$N(x_0, \varepsilon)$
كرة مفتوحة محذوفة المركز	$N'(x_0, \varepsilon)$
تجزئة لمجال	P
الجداء الديكارتي للمجموعات $A_1, \ldots, A_n$	$\prod_{i=1}^{n} A_i$
الجداء الديكارتي للمجموعات $A_1, A_2, \ldots$	$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$
الجداء الديكارتي للجماعة $\{A_i\}, i \in I$	$\prod_I A_i$

مجموعة الأعداد العادية	Q
مجموعة الأعداد الحقيقية (الموجبة)	$R(R_+)$
فضاء الأعداد الحقيقية المألوف	$\mathbb{R}$
موسَّع الأعداد الحقيقية	R^*
الجيب الزائدي	sh
الحد الأعلى	sup
فضاء متري مؤلف من المجموعة X المزودة بالمترك D	(X, D)
القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x	$\lvert x \rvert$
متوالية	$\{x_n\}, n \in N$
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
النقطة المثالية زائد لا نهاية	∞ أو $+\infty$
النقطة المثالية ناقص لا نهاية	$-\infty$

مراجع الكتاب

1. APOSTOL, T., *Mathematical Analysis,* Addison-Wesley (1957).
2. BEALS, R., *Advanced Mathematical Analysis,* Springer-Verlag (1973).
3. DEVINATZ, A., *Advanced Calculus,* Holt, Rinehart and Winston (1968).
4. DIEUDONNÉ, J., *Modern Analysis,* Academic Press (1960).
5. FLETT, T., *Mathematical Analysis,* McGraw-Hill (1966).
6. FULLERTON, G., *Mathematical Analysis,* Oliver and Boyd (1971).
7. GILES, J., *Real Analysis: An Introductory Course,* John Wiley (1972).
8. LABARRE, A., *Intermediate Mathematical Analysis,* Holt, Rinehart and Winston (1968).
9. McCARTY, G., *Topology,* McGraw-Hill (1967).
10. MUNKRES, J., *Topology: A First Course,* Prentice-Hall (1975).
11. SIMMONS, G., *Introduction to Topology and Modern Analysis,* McGraw-Hill (1963).
12. WHITE, A., *Real Analysis: An Introduction,* Addison-Wesley (1968).
13. عبد الغني الطنطاوي ، مبادىء التحليل الرياضي — الجزء الاول ، مطبعة جامعة دمشق (١٩٧٢)
14. عبد الغني الطنطاوي ، مبادىء التحليل الرياضي — الجزء الثاني ، مطبعة جامعة دمشق (١٩٧٣)
15. سودان ودعبول والأحمد وبرني ، الرياضيات المعاصرة : البنى الجبرية ، مؤسسة الرسالة للطباعة والنشر (١٩٧٢)
16. خضر حامد الأحمد ، الأسس المعاصرة للهندسة التحليلية ، مكتبة الرازي — دمشق (١٩٧٣)
17. خضر حامد الأحمد ، مبادىء التوبولوجيا العامة ، مطبعة جامعة دمشق (١٩٧٥)

انتهى بحمد الله

شركة مطابع المطوع - الدمام